Primitives techniques

Exercice 3F.1 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$ sur $\mathbb{R}$ b) $g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]1;+\infty[$ d) $m(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1;+\infty[$

EXERCICE 3F.2

On considère les fonctions suivantes définies et dérivables sur]0 ; +∞[par :

$f(x)=x\ln x$ $g(x)=\ln x+1$

a. $f(x)$ est-elle une primitive de $g(x)$? Justifier. En déduire une primitive de la fonction ln.

b. Déterminer LA primitive de *g* qui s'annule pour $x = e$

Exercice 3F.3 :

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-8x-1}{(x+3)(x-1)^2}$ définie sur $\mathbb{R}-\{-3;1\}$.

1) Déterminer les a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}-\{-3;1\}$

$f(x)=\dfrac{a}{(x+3)}+\dfrac{b}{(x-1)}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

2) En déduire une primitive F de la fonction *f*.

Exercice 3F.4 :

Soit *f* la fonction définie sur]–3 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{2x^2+12x+19}{(x+3)^2}$

a. Déterminer les réels *a* et *b* tels que, pour tout *x* de]–3 ; +∞[on ait : $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+3)^2}$

b. En déduire les primitives de *f* sur]–3 ; +∞[.

Exercice 3F.5 :

Soit *g* la fonction définie sur $]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{3x}{(3x+1)^3}$

a. Déterminer les réels *a* et *b* tels que, pour tout *x* de $]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$ on ait : $g(x)=\dfrac{a}{(3x+1)^2}-\dfrac{b}{(3x+1)^3}$

b. En déduire les primitives de *g* sur $]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$.

Exercice 3F.6 :

Soit *h* la fonction définie sur]1 ; +∞[par : $h(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+4}{(x-1)^2}$

a. Déterminer les réels *a* et *b* tels que, pour tout *x* de]1 ; +∞[on ait : $h(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

b. En déduire les primitives de *h* sur]1 ; +∞[.

Exercice 3F.1 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}=e^{-2x}$ → on pose : $u(x)=-2x$ donc $u'(x)=-2$

Ainsi : $f(x)=-\dfrac{1}{2}\times(-2)e^{-2x}=-\dfrac{1}{2}\times u'(x)e^{u(x)}$

Donc $F(x)=-\dfrac{1}{2}\times e^{u(x)}=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

$g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}=\dfrac{(1+x^2)x-x}{1+x^2}=\dfrac{(1+x^2)x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=x-\dfrac{x}{1+x^2}$

→ on pose : $u(x)=1+x^2$ donc $u'(x)=2x$

Ainsi : $g(x)=x-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{1+x^2}=x-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $G(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(u(x))=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\times\ln x$ sur $]1;+\infty[$

→ on pose : $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$

Ainsi : $h(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln x=u'(x)\times u(x)$

Donc $H(x)=\dfrac{1}{2}(u(x))^2=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

$m(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1;+\infty[$

→ on pose : $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$

Ainsi : $m(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $M(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|\ln x|)=\ln(\ln x)$ car $x\in]1;+\infty[$ donc $\ln x>0$

EXERCICE 3F.2

On considère les fonctions suivantes définies et dérivables sur]0 ; +∞[par :

$f(x)=x\ln x$ $\qquad$ $g(x)=\ln x+1$

a. $f(x)$ *est-elle une primitive de* $g(x)$ *? Justifier. En déduire une primitive de la fonction ln.*

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1=g(x)$

La fonction f est une primitive de la fonction g.

Une primitive de la fonction logarithme est :

$F(x)=x\ln x-x$

b. *Déterminer LA primitive de g qui s'annule pour x = e.*

L'ensemble des primitives de la fonction g est :

$$G(x) = x\ln x + k \text{ , } k \in \mathbb{R}$$

$$G(e) = 0 \iff e \times \ln e + k = 0 \iff k = -e$$

La primitive cherchée est :

$$G(x) = x\ln x - e$$

Exercice 3F.3 : *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$ *définie sur* $\mathbb{R} - \{-3;1\}$.

1) *Déterminer les* a, b *et* c *tels que* $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3;1\}$: $f(x) = \dfrac{a}{(x+3)} + \dfrac{b}{(x-1)} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3;1\} : \frac{a}{(x+3)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$$

$$= \frac{a(x^2 - 2x + 1) + b(x^2 + 2x - 3) + c(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2(a+b) + x(-2a + 2b + c) + (a - 3b + 3c)}{(x+3)(x-1)^2}$$

Par identification des coefficients avec la fonction *f*, on obtient :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + 2b + c = -8 \\ a - 3b + 3c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ -2 + 2b + 2b + c = -8 \\ 1 - b - 3b + 3c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ c = -6 - 4b \\ 1 - 4b - 18 - 12b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ c = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3;1\} : f(x) = \frac{2}{(x+3)} + \frac{-1}{(x-1)} + \frac{-2}{(x-1)^2}$$

2) *En déduire une primitive F de la fonction f.*

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x-1)} + \frac{-2}{(x-1)^2}$$

→ on pose : $u(x) = x - 1$ donc $u'(x) = 1$

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x-1)} - 2\frac{u'(x)}{u^2(x)} = 2 \times \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x-1)} - 2u'(x)u^{-2}(x)$$

Donc : $F(x) = 2 \times \ln(x+3) - \ln(x-1) - 2\dfrac{u^{-1}(x)}{-1} = 2 \times \ln(x+3) - \ln(x-1) + \dfrac{2}{x-1}$

Exercice 3F.4

Soit f la fonction définie sur]–3 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 12x + 19}{(x+3)^2}$

a. *Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de]–3 ; +∞[on ait :* $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+3)^2}$

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+3)^2} = \frac{a(x+3)^2 + b}{(x+3)^2} = \frac{a(x^2 + 6x + 9) + b}{(x+3)^2} = \frac{ax^2 + 6ax + 9a + b}{(x+3)^2}$$

Par identification : $\begin{cases} a=2 \\ 6a=12 \\ 9a+b=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\dfrac{12}{6}=2 \\ b=19-9a=19-9\times 2=1 \end{cases}$ → $f(x)=2+\dfrac{1}{(x+3)^2}$

b. On pose $u(x)=x+3$ → $u'(x)=1$ alors : $f(x)=2+\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

Les primitives de f sur]–3 ; +∞[sont : $F(x)=2x-\dfrac{1}{u(x)}+k=2x-\dfrac{1}{x+3}+k$, $k\in\mathbb{R}$

EXERCICE 3F.5

Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ *par :* $g(x)=\dfrac{3x}{(3x+1)^3}$

a. *Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de* $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ *on ait :* $g(x)=\dfrac{a}{(3x+1)^2}-\dfrac{b}{(3x+1)^3}$

$$g(x)=\frac{a}{(3x+1)^2}-\frac{b}{(3x+1)^3}=\frac{a(3x+1)-b}{(3x+1)^3}=\frac{3ax+a-b}{(3x+1)^3}$$

Par identification : $\begin{cases} 3a=3 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=a=1 \end{cases}$ → $g(x)=\dfrac{1}{(3x+1)^2}-\dfrac{1}{(3x+1)^3}$

b. On pose $u(x)=3x+1$ → $u'(x)=3$ alors : $g(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u^3(x)}$

Les primitives de g sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ sont : $G(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-1}{u(x)}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-1}{2u^2(x)}+k=\dfrac{-1}{3(3x+1)}+\dfrac{1}{6(3x+1)^2}+k$

EXERCICE 3F.6

Soit h la fonction définie sur]1 ; +∞[par : $h(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+4}{(x-1)^2}$

a. *Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de]1 ; +∞[on ait :* $h(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$h(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)\left(x^2-2x+1\right)+c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+(b+c)}{(x-1)^2}$$

Par identification : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1 \\ a-2b=-1 \\ b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1+2a=1 \\ b=\dfrac{a+1}{2}=1 \\ c=4-b=3 \end{cases}$ → $h(x)=x+1+\dfrac{3}{(x-1)^2}$

b. On pose $u(x)=x-1$ → $u'(x)=1$ alors : $h(x)=x+1+\dfrac{3u'(x)}{u^2(x)}$

Les primitives de h sur]1 ; +∞[sont : $H(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{3}{u(x)}+k=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{3}{x-1}+k$, $k\in\mathbb{R}$