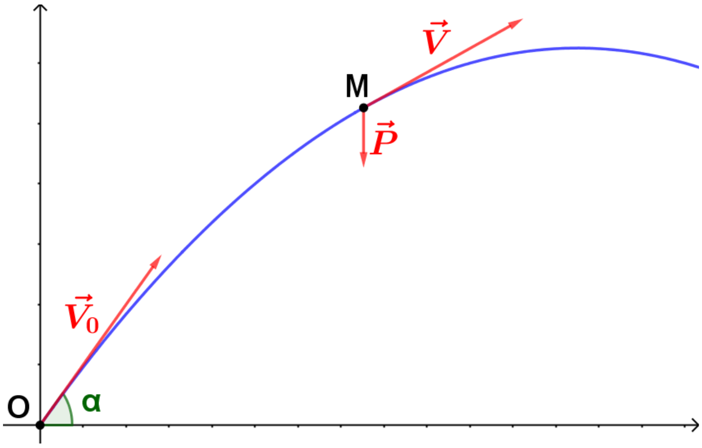
Balistique « dans le vide », sans frottement (problème de Torricelli) – N. D. de La Merci – M. Quet



A $t=0$ le projectile est lancé à la vitesse V_0 selon un angle α (en degrés) avec l'horizontale.

On considère que seul le poids s'applique à la masse M du projectile, en négligeant les frottements de l'air.

Dans un repère orthogonal, la décomposition sur les axes $[Ox)$ et $[Oy)$ permet d'écrire :

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \times \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \times \sin\alpha \end{cases} \qquad \text{où } V_0 = \left\|\overrightarrow{V_0}\right\|.$$

En un point M quelconque de la trajectoire nous avons :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \vec{a} \qquad \text{avec } a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \ , \ \overrightarrow{F_{ext}}\begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix} \ , \ \vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix}$$

Horizontalement :

$$F_x = m \times a_x \iff 0 = m \times a_x \iff a_x = 0$$

avec $m \neq 0$ où a_x représente la valeur absolue de l'accélération horizontale.

Ainsi : $$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \iff v_x(t) = k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

La condition initiale donne :

$$v_x(t) = V_0 \times \cos\alpha .$$

Ainsi : $$\frac{dx(t)}{dt} = V_0 \times \cos\alpha \iff x(t) = V_0 \times \cos\alpha \times t + k \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale donne :

$$x(t) = V_0 \times \cos\alpha \times t .$$

Verticalement :

$$F_y = m \times a_y \iff -mg = m \times a_y \iff a_y = -g$$

avec $m \neq 0$ où a_x représente la valeur absolue de l'accélération horizontale.

Ainsi : $$\frac{dv_y(t)}{dt} = -g \iff v_y(t) = -gt + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

La condition initiale donne : $v_y(t) = -gt + V_0 \times \sin\alpha$.

Ainsi : $$\frac{dy(t)}{dt} = -gt + V_0 \times \sin\alpha \iff y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \times \sin\alpha \times t + k \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale donne : $y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + V_0 \times \sin\alpha \times t$

Écriture de y en fonction de x :

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \times \sin\alpha \times t$$

Or : $x(t) = V_0 \times \cos\alpha \times t \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{x(t)}{V_0 \times \cos\alpha}$

Donc : $y(t) = -\dfrac{g}{2} \times \left(\dfrac{x(t)}{V_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + V_0 \times \sin\alpha \times \dfrac{x(t)}{V_0 \times \cos\alpha}$

$$= -\frac{g}{2 \times (V_0 \times \cos\alpha)^2} \times (x(t))^2 + \tan\alpha \times x(t)$$

Soit : $y = -\dfrac{g}{2 \times (V_0 \times \cos\alpha)^2} \times x^2 + \tan\alpha \times x$