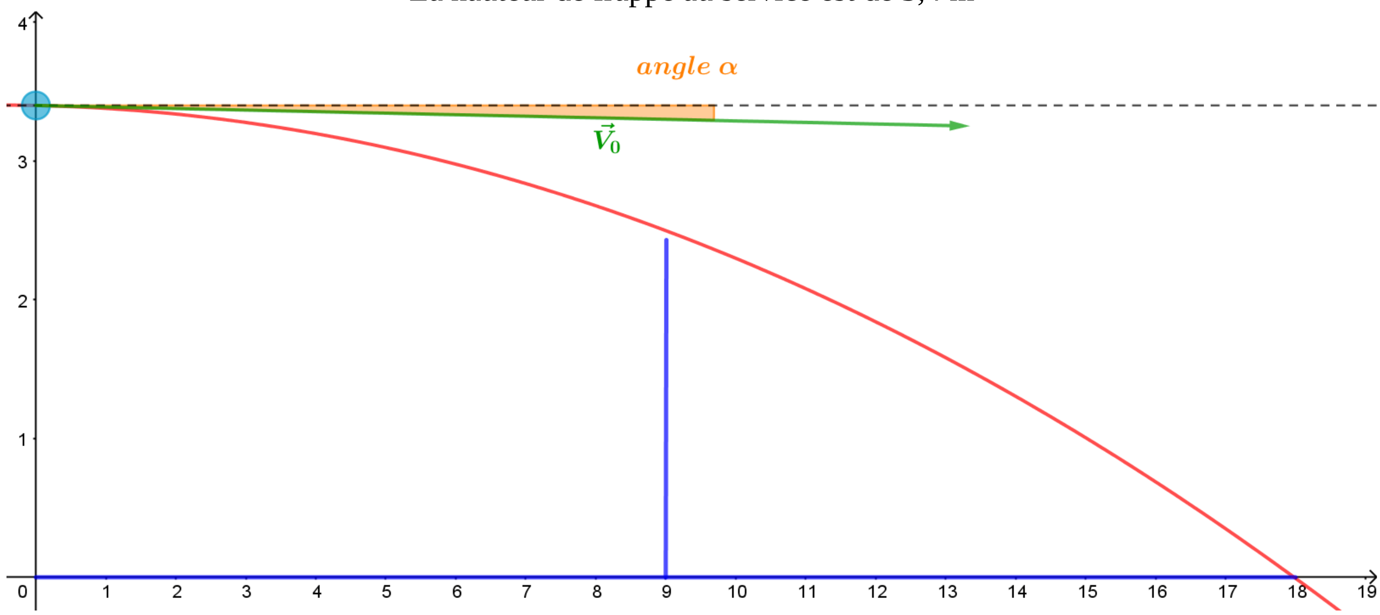
Lancement d’un ballon de volley en service smashé – N. D. de La Merci – M. Quet

Les dimensions du terrain sont 18*9 m

La hauteur du filet est 2,43 m

Le diamètre du ballon est de 21 cm, son poids est de 0,27 kg.

La hauteur de frappe au service est de 3,4 m



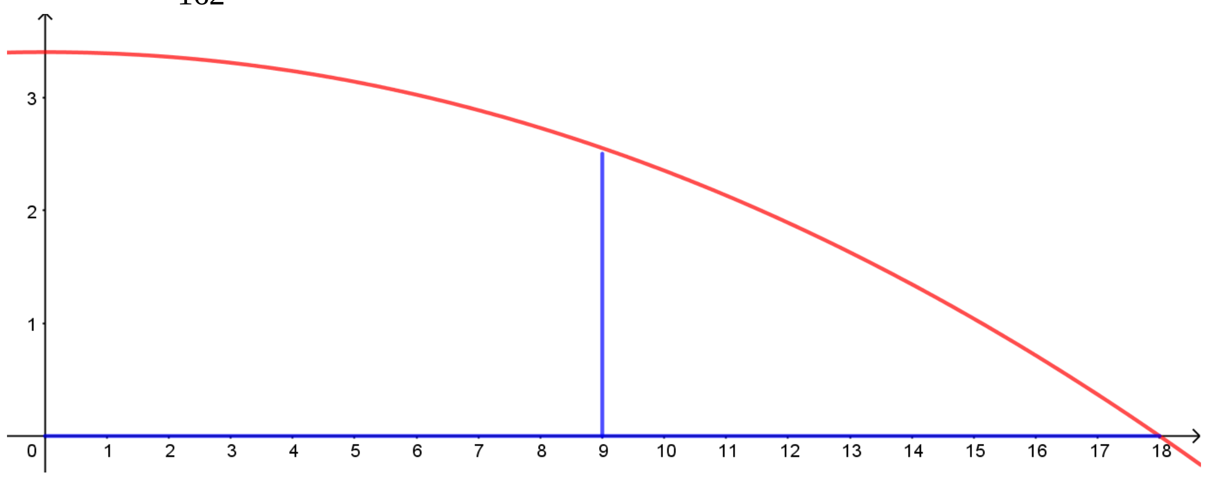
Première méthode scolaire qui ne tient pas compte de la vitesse initiale ni de l’angle de tir :

On cherche une parabole de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ correspondant à trois critères :

$$\begin{cases} f(0)=3,4 \\ f(9)=2,55 \\ f(18)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 0^2+b\times 0+c=3,4 \\ a\times 9^2+b\times 9+c=2,55 \\ a\times 18^2+b\times 18+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3,4 \\ 81a+9b=2,55-3,4 & \times 2 \\ 324a+18b=-3,4 & \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3,4 \\ 162a+18b=-1,7 \\ 324a+18b=-3,4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=3,4 \\ 81a+9b=-0,85 \\ 324a-162a=-3,4+1,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3,4 \\ 81a+9b=-0,85 \\ 162a=-1,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3,4 \\ 9b=-0,85-81\times\dfrac{-1,7}{162}=0 \\ a=\dfrac{-1,7}{162} \end{cases}$$

On obtient : $f(x)=\dfrac{-1,7}{162}x^2+3,4$:



Deuxième méthode :

A $t=0$ le projectile est lancé à une hauteur de 3,40 m, à la vitesse V_0 selon un angle α (en degrés) avec l'horizontale. On considère que seul le poids s'applique à la masse M du ballon.

Dans un repère orthogonal, la décomposition sur les axes $[Ox)$ et $[Oy)$ permet d'écrire :

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \times \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \times \sin\alpha \end{cases} \qquad \text{où } V_0 = \left\|\overrightarrow{V_0}\right\|.$$

En un point M quelconque de la trajectoire nous avons :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \vec{a} \qquad \text{avec } a(t) = \frac{dv(t)}{dt}\ ,\ \overrightarrow{F_{ext}}\begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix}\ ,\ \vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix}$$

Horizontalement :

$$F_x = m \times a_x \iff 0 = m \times a_x \iff a_x = 0$$

avec $m \neq 0$ où a_x représente la valeur absolue de l'accélération horizontale.

Ainsi : $$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \iff v_x(t) = k\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

La condition initiale donne :

$$v_x(t) = V_0 \times \cos\alpha.$$

Ainsi : $$\frac{dx(t)}{dt} = V_0 \times \cos\alpha \iff x(t) = V_0 \times \cos\alpha \times t + k\ ,\ k \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale donne :

$$x(t) = V_0 \times \cos\alpha \times t.$$

Verticalement :

$$F_y = m \times a_y \iff -mg = m \times a_y \iff a_y = -g$$

avec $m \neq 0$ où a_x représente la valeur absolue de l'accélération horizontale.

Ainsi : $$\frac{dv_y(t)}{dt} = -g \iff v_y(t) = -gt + k\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

La condition initiale donne :

$$v_y(t) = -gt + V_0 \times \sin\alpha.$$

Ainsi : $$\frac{dy(t)}{dt} = -gt + V_0 \times \sin\alpha \iff y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \times \sin\alpha \times t + k\ ,\ k \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale donne :

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \times \sin\alpha \times t + 3,4.$$

Écriture de y en fonction de x :

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \times \sin\alpha \times t + 3,4$$

Or : $$x(t) = V_0 \times \cos\alpha \times t \iff t = \frac{x(t)}{V_0 \times \cos\alpha}$$

Donc : $$y(t) = -\frac{g}{2} \times \left(\frac{x(t)}{V_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + V_0 \times \sin\alpha \times \frac{x(t)}{V_0 \times \cos\alpha} + 3,4$$

$$= -\frac{g}{2\times(V_0\times\cos\alpha)^2}\times(x(t))^2+\tan\alpha\times x(t)+3,4$$

Soit : $$y=-\frac{g}{2\times(V_0\times\cos\alpha)^2}\times x^2+\tan\alpha\times x+3,4$$

Détermination de la vitesse initiale pour que le service soit bon pour un angle donné inférieur à 6° :

- une vitesse minimale $V_{\min}$ pour que la ballon arrive au sol en passant juste au-dessus du filet ;
- une vitesse maximale $V_{\max}$ pour que la ballon arrive au sol à la limite du camp adverse.

Si le ballon atteint la vitesse $V_{\min}$, il doit passer exactement par la position $x=9$ et $y=2,55$, soit, en reportant cette condition dans l'équation de la trajectoire :

$$y=-\frac{g}{2\times(V_{\min}\times\cos\alpha)^2}\times x^2+\tan\alpha\times x+3,4$$

$$\Leftrightarrow\quad y-\tan\alpha\times x-3,4=-\frac{g}{2\times(V_{\min}\times\cos\alpha)^2}\times x^2$$

$$\Leftrightarrow\quad -y+\tan\alpha\times x+3,4=\frac{2(V_{\min}\times\cos\alpha)^2}{gx^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{gx^2}{2(-y+\tan\alpha\times x+3,4)}=(V_{\min}\times\cos\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad V_{\min}=\frac{1}{\cos\alpha}\times\sqrt{\frac{gx^2}{2(-y+\tan\alpha\times x+3,4)}}$$

→Pour $x=9$ et $y=2,55$ avec un angle de 3° :

$$V_{\min}=\frac{1}{\cos 3}\times\sqrt{\frac{9,81\times 9^2}{2(-2,55+(\tan(-3))\times 9+3,4)}}\simeq 32,45\,m/s$$

Si le ballon atteint la vitesse $V_{\max}$, il doit passer exactement par la position $x=18$ et $y=0$, soit, en reportant cette condition dans l'équation de la trajectoire :

$$y=-\frac{g}{2\times(V_{\max}\times\cos\alpha)^2}\times x^2+\tan\alpha\times x+3,4$$

$$V_{\max}=\frac{1}{\cos 3}\times\sqrt{\frac{9,81\times 18^2}{2(-0+(\tan(-3))\times 18+3,4)}}\simeq 25,47\,m/s$$

Il n'est pas possible de servir avec un angle de 3° vers le bas
Avec un angle de 1° vers le bas :

$$V_{\min}\simeq 23,95\,m/s \quad\text{et}\quad V_{\max}\simeq 22,7\,m/s$$

Il n'est pas possible de servir avec un angle de 1° vers le bas
Avec un angle de 0°, la vitesse initiale doit être comprise entre 21,62 et 21,62 m/s.
Voici un tableau de mesures :

Angle	$V_{\min}$	$V_{\max}$
$-1,5°$	25,4	23,3
$-1°$	23,95	22,7
$-0,5°$	22,7	22,1
$0°$	21,6	21,6

$0,5°$	20,7	21,1
1°	19,9	20,7
$1,5°$	19,1	20,3
2°	18,5	19,9

Les frappes vers le bas ne sont pas compatibles car elles induisent $V_{\max} < V_{\min}$.
La frappe à 0° semblent être la meilleure.