EXERCICE 4A.1 Dans chaque cas, déterminer LA primitive de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée :

a. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ $\quad I=\mathbb{R}^*$ $\quad F(1)=2$

b. $f(x)=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^3}$ $\quad I=\mathbb{R}$ $\quad F(0)=1$

c. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+7}$ $\quad I=\mathbb{R}$ $\quad F(1)=-1$

d. $f(x)=\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^3}$ $\quad I=\mathbb{R}^*$ $\quad F(1)=0$

e. $f(x)=x^2\left(x^3+1\right)$ $\quad I=\mathbb{R}$ $\quad F(-1)=1$

f. $f(x)=10x\times e^{x^2+4}$ $\quad I=\mathbb{R}$ $\quad F(5)=2$

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICES 4A.1

Dans chaque cas, déterminer LA primitive de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée :

a. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=x^{-2}+x^{-3}$ $I=\mathbb{R}^*$ $F(1)=2$

→ $F(x)=\dfrac{x^{-1}}{-1}+\dfrac{x^{-2}}{-2}+k=\dfrac{-1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$

or $F(1)=2$ donc : $F(1)=\dfrac{-1}{1}-\dfrac{1}{2\times1^2}+k=2 \Leftrightarrow k=2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$ → $F(x)=\dfrac{-1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{7}{2}$

b. $f(x)=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^3}$ $I=\mathbb{R}$ $F(0)=1$

→on pose $u(x)=1+x^2$ → $u'(x)=2x$ alors $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u^3(x)}=\dfrac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)$

→ $F(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u^{-2}(x)}{-2}+k=\dfrac{-1}{4\left(1+x^2\right)^2}+k$

Or $F(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{4\left(1+0^2\right)^2}+k=1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{4}+k=1 \Leftrightarrow k=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$ et $F(x)=\dfrac{-1}{4\left(1+x^2\right)^2}+\dfrac{5}{4}$

c. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+7}$ $I=\mathbb{R}$ $F(1)=-1$

→on pose $u(x)=x^2+7$ → $u'(x)=2x$ alors $f(x)=2\times\dfrac{2x}{x^2+7}=2\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

→ $F(x)=2\ln\left|x^2+7\right|+k=2\ln\left(x^2+7\right)+k$

Or $F(1)=-1 \Leftrightarrow 2\ln\left(1^2+7\right)+k=-1 \Leftrightarrow 2\ln(8)+k=-1 \Leftrightarrow k=-1-2\ln(8)$

Donc $F(x)=2\ln\left(x^2+7\right)-1-2\ln(8)$

d. $f(x)=\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^3}=x+1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ $I=\mathbb{R}^*$ $F(1)=0$

→ $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+k$

or $F(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1^2}{2}+1-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2\times1^2}+k=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+1-1-\dfrac{1}{2}+k=0 \Leftrightarrow k=0$

→ $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$

e. $f(x)=x^2\left(x^3+1\right)$ $I=\mathbb{R}$ $F(-1)=1$

→on pose $u(x)=x^3+1$ → $u'(x)=3x^2$ alors $f(x)=\dfrac{1}{3}u'(x)u(x)$

→ $F(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}u^2(x)+k=\dfrac{1}{6}\left(x^3+1\right)^2+k$

or $F(-1)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}\left((-1)^3+1\right)^2+k=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}(-1+1)^2+k=1 \Leftrightarrow k=1$ → $F(x)=\dfrac{1}{6}\left(x^3+1\right)^2+1$

f. $f(x)=10x\times e^{x^2+4}$ $I=\mathbb{R}$ $F(5)=2$

→on pose $u(x)=x^2+4$ → $u'(x)=2x$ alors $f(x)=10x\times e^{x^2+4}=5\times 2xe^{x^2+4}=5\times u'(x)\times u(x)$

→ $F(x)=5e^{x^2+4}+k$

Or $F(5)=2 \Leftrightarrow 5e^{5^2+4}+k=2 \Leftrightarrow 5e^{29}+k=2 \Leftrightarrow k=2-5e^{29}$

Donc $F(x)=5e^{5^2+4}+2-5e^{29}$