Rappel :

La solution générale d'une équation différentielle du type « $y' = ay + b$ » où a et b sont deux réels est

$$y(x) = C.e^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 5B.1

Dans chaque cas, transformer l'équation (si nécessaire) puis donner la solution générale.

a. $y' = 3y + 4 \Leftrightarrow$	Solution générale :
b. $y' = -2y - 7 \Leftrightarrow$	Solution générale :
c. $y' + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow$	Solution générale :
d. $3y' + 6y - 9 = 0 \Leftrightarrow$	Solution générale :
e. $y' - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$	Solution générale :
f. $3y' - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow$	Solution générale :
g. $y = 3y' + 1 \Leftrightarrow$	Solution générale :
h. $-2y' - 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow$	Solution générale :
i. $-2y' + y + 1 = 0 \Leftrightarrow$	Solution générale :
j. $y' = 4 \Leftrightarrow$	Solution générale :

EXERCICE 5B.2

Déterminer la solution f de l'équation (E): $y' = 3y - 1$ telle que $f(0) = 4$.

EXERCICE 5B.3

Déterminer la solution f de l'équation (E): $2y' = y + 6$ telle que $f(\ln 16) = 5$.

EXERCICE 5B.4

Déterminer la solution f de l'équation (E): $2y' + y = 8$ telle que $f(4) = e + 1$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICE 5B.1

Dans chaque cas, transformer l'équation (si nécessaire) puis donner la solution générale.

a. $y'=3y+4 \Leftrightarrow$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{3x}-\frac{4}{3}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
b. $y'=-2y-7 \Leftrightarrow$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{-2x}-\frac{7}{2}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
c. $y'+5y+1=0 \Leftrightarrow y'=-5y-1$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{-5x}-\frac{1}{5}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
d. $3y'+6y-9=0 \Leftrightarrow y'=-2y+3$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{-2x}+\frac{3}{2}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
e. $y'-2y-3=0 \Leftrightarrow y'=2y+3$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{2x}-\frac{3}{2}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
f. $3y'-2y+4=0 \Leftrightarrow y'=\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{\frac{2x}{3}}+2$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
g. $y=3y'+1 \Leftrightarrow y'=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{\frac{x}{3}}+1$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
h. $-2y'-6y+4=0 \Leftrightarrow y'=-3y+2$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{-3x}+\frac{2}{3}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
i. $-2y'+y+1=0 \Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$	Solution générale :	$y(x)=\text{C}.e^{\frac{x}{2}}-1$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$
j. $y'=4 \Leftrightarrow y'=0y+4$	Solution générale :	$y(x)=4x+\text{C}$ avec $\text{C}\in\mathbb{R}$

EXERCICE 5B.2

Déterminer la solution f de l'équation (E) : $y'=3y-1$ telle que $f(0)=4$.

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(x)=k\times e^{3x}+\frac{1}{3}\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

La condition initiale $f(0)=4$ s'applique :

$$f(0)=4 \Leftrightarrow k\times e^{3\times 0}+\frac{1}{3}=4 \Leftrightarrow k=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}.$$

La fonction cherchée est :

$$f(x)=\frac{11}{3}e^{3x}+\frac{1}{3}.$$

EXERCICE 5B.3

Déterminer la solution f de l'équation (E) : $2y'=y+6$ telle que $f(\ln 16)=5$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'=\frac{1}{2}y+3$ sont de la forme :

$$f(x)=k\times e^{\frac{1}{2}x}-6\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

La condition initiale $f(\ln 16)=5$ s'applique :

$$f(\ln 16)=5 \Leftrightarrow k\times e^{\frac{1}{2}\times\ln 16}-6=5 \Leftrightarrow k\times e^{\ln 4}=11 \Leftrightarrow 4k=11 \Leftrightarrow k=\frac{11}{4}.$$

La fonction cherchée est :

$$f(x)=\frac{11}{4}\times e^{\frac{1}{2}x}-6.$$

EXERCICE 5B.4

Déterminer la solution f *de l'équation* (E) : $2y'+y=8$ telle que $f(4)=e+1$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'=-\frac{1}{2}y+4$ sont de la forme :

$$f(x)=k\times e^{-\frac{1}{2}x}+8 \ , \ k\in\mathbb{R}.$$

La condition initiale $f(4)=e+1$ s'applique :

$$f(4)=e+1 \iff k\times e^{-\frac{1}{2}\times 4}+8=e+1 \iff k\times e^{-2}=e-7 \iff \frac{k}{e^2}=e-7 \iff k=e^2(e-7).$$

La fonction cherchée est :

$$f(x)=e^2(e-7)\times e^{-\frac{1}{2}x}+8.$$