Exercice 5C.1

Lors d'une hydrolyse de saccharose, on étudie l'évolution de sa concentration, exprimée en mol.L^{-1}, en fonction du temps t, exprimé en minute. Cette concentration est modélisée par une fonction C solution de l'équation différentielle $y' = -0,008y$. La concentration initiale du saccharose est de 10 mol.L^{-1}.

1) Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer $C(t)$ en fonction de t.
2) Déterminer la concentration du saccharose après 2 h 30 d'hydrolyse.

Exercice 5C.2

La température de refroidissement d'un objet, fabriqué industriellement, est modélisée par une fonction f où, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t)$ représente la température de l'objet, exprimée en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en heure. La fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 10$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).
2) La température initiale de l'objet est $220°C$.
   Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t.
3) a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c) Interpréter les résultats précédents dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5C.3

Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.
On admet que le volume de pesticide, en litre, dans ce bassin est modélisé par une fonction V définie sur $[0;+\infty[$ par $V(t) = f(t) + 1200$, où t est le temps, exprimé en minute, et f une fonction solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,005y = 0$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).
2) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume de pesticide dans l'eau est nul.
   En déduire que, pour tout réel $t \geq 0$,
   $$V(t) = 1200\left(1 - e^{-0,005t}\right).$$
3) a) Calculer le volume limite de pesticide, noté V_L, défini par $V_L = \lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$.
   b) Etudier le sens de variation de la fonction V sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
   c) Montrer que l'équation $V(t) = 600$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à l'unité près.
4) Les services sanitaires considèrent que des affections cutanées peuvent survenir dès que le volume de pesticide dans le bassin atteint la moitié de la valeur limite. Au bout de combien de temps ce taux est-il atteint ?

Exercice 5C.4

On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant *t* (exprimé en heure).

A l'instant $t=0$, ce corps dont la température est de 100 °C est placé dans une salle à 20 °C.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle, avec un coefficient de refroidissement égal à $-2,08$, et vérifie l'équation :

$$q'(t)=-2,08\times q(t)+41,6$$

1. Déterminer l'expression de $q(t)$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction q sur $[0;+\infty[$.
3. Calculer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
4. Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes puis au bout de 30 minutes.
5. Déterminer la valeur exacte du temps au bout duquel le corps tombera à 30 °C.
   En donner une valeur approchée.

Exercice 5C.1

Lors d'une hydrolyse de saccharose, on étudie l'évolution de sa concentration, exprimée en mol.L^{-1}, *en fonction du temps* t, *exprimé en minute. Cette concentration est modélisée par une fonction C solution de l'équation différentielle* $y'=-0,008y$. *La concentration initiale du saccharose est de 10* mol.L^{-1}.

1) *Pour tout réel* $t \geq 0$, *exprimer* $C(t)$ *en fonction de* t.

Les solutions de l'équation différentielle $y'=-0,008y$ *sont :*

$$y(t)=ke^{-0,008t}\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

$C(t)$ est une de ces solutions vérifiant $C(0)=10$, donc :

$$ke^{-0,008\times 0}=10 \iff k=10$$

Ainsi $\quad C(t)=10e^{-0,008t}$.

2) *Déterminer la concentration du saccharose après 2 h 30 d'hydrolyse.*

Le temps est en minute, donc :

$$C(150)=10e^{-0,008\times 150}\simeq 3,011$$

Soit environ 3 mol.L^{-1}.

Exercice 5C.2

La température de refroidissement d'un objet, fabriqué industriellement, est modélisée par une fonction f *où, pour tout réel* $t\geq 0$, $f(t)$ *représente la température de l'objet, exprimée en degré Celsius, à l'instant* t, *exprimé en heure. La fonction* f *est solution de l'équation différentielle* $(E) : y'+\frac{1}{2}y=10$.

1) *Résoudre l'équation différentielle* (E).

L'équation (E) s'écrit :

$$(E) : y'=-\frac{1}{2}y+10.$$

Les solutions de (E) sont :

$$y(t)=ke^{-\frac{1}{2}t}-\frac{10}{-\frac{1}{2}}=ke^{-\frac{1}{2}t}+20\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

2) *La température initiale de l'objet est* $220°C$.
Déterminer, pour tout réel $t\geq 0$, *l'expression de* $f(t)$ *en fonction de* t.

La condition initiale $f(0)=220$ donne :

$$ke^{-\frac{1}{2}\times 0}+20=220 \iff k=220-20=200.$$

La fonction f s'écrit :

$$f(t)=200e^{-\frac{1}{2}t}+20$$

3) a) *Etudier le sens de variation de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

La fonction f est dérivable en tant que composée de fonction exponentielle.

$$f'(t)=200\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}t}=-100e^{-\frac{1}{2}t}.$$

La dérivée étant strictement négative, la fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

b) *Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}=0$$

Par produit et somme de limites :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=20$$

c) *Interpréter les résultats précédents dans le contexte de l'exercice.*

La température va baisser progressivement, jusqu'à se stabiliser à 20° C.

Exercice 5C.3

Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.

On admet que le volume de pesticide, en litre, dans ce bassin est modélisé par une fonction V définie sur $[0;+\infty[$ par $V(t)=f(t)+1200$, où t est le temps, exprimé en minute, et f une fonction solution de l'équation différentielle $(E): y'+0,005y=0$.

1) *Résoudre l'équation différentielle (E).*

Les solutions de $(E): y'=-0,005y$ sont :

$$y(t)=ke^{-0,005t}\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

2) *On suppose qu'à l'instant $t=0$, le volume de pesticide dans l'eau est nul.*

En déduire que, pour tout réel $t\geq 0$, $V(t)=1200\left(1-e^{-0,005t}\right)$.

$$V(t)=f(t)+1200=ke^{-0,005t}+1200\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

Or $\quad V(0)=0$

Donc $\quad ke^{-0,005\times 0}+1200=0$

$\Leftrightarrow\ k=-1200$

Ainsi : $\quad V(t)=-1200e^{-0,005t}+1200=1200\left(1-e^{-0,005t}\right)$

3) **a)** *Calculer le volume limite de pesticide, noté V_L, défini par $V_L=\lim_{t\to+\infty} V(t)$.*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-0,005t}=0$$

Par somme et produit de limites :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=1200 \ \rightarrow V_L=1200$$

b) Etudier le sens de variation de la fonction V sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

La fonction V est dérivable pour tout réel $t\geq 0$,

$$V'(t)=1200\times 0,005e^{-0,005t}=6e^{-0,005t}.$$

La dérivée étant strictement positive, la fonction V est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c) *Montrer que l'équation $V(t)=600$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à l'unité près.*

On sait que V est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $V(0)=0$ et $V_L=1200$.

D'après le T.V.I., il existe une unique valeur α *sur* $[0;+\infty[$ telle que $V(\alpha)=600$.

On obtient : $\alpha \simeq 139$.

4) *Les services sanitaires considèrent que des affections cutanées peuvent survenir dès que le volume de pesticide dans le bassin atteint la moitié de la valeur limite. Au bout de combien de temps ce taux est-il atteint ?*

On doit résoudre l'inéquation :

$$
\begin{aligned}
& V(t) \geq \frac{1}{2} V_L \\
\Leftrightarrow\ & 1200\left(1-e^{-0,005t}\right) \geq \frac{1}{2} \times 1200 \\
\Leftrightarrow\ & 1-e^{-0,005t} \geq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -e^{-0,005t} \geq \frac{1}{2}-1 \\
\Leftrightarrow\ & -e^{-0,005t} \geq -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & e^{-0,005t} \leq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -0,005t \leq \ln \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \text{car le ln est une fonctions strictement croissante} \\
\Leftrightarrow\ & -0,005t \leq -\ln 2 \\
\Leftrightarrow\ & t \geq \frac{-\ln 2}{-0,005} \\
\Leftrightarrow\ & t \geq 200 \ln 2
\end{aligned}
$$

On retrouve la valeur obtenue à la question précédente : à partir de la 129ème minute.

Exercice 5C.4

On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant t (exprimé en heure)
A l'instant $t=0$, ce corps dont la température est de 100 °C est placé dans une salle à 20 °C.
D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle, avec un coefficient de refroidissement égal à $-2,08$, et vérifie l'équation :

$$q'(t) = -2,08 \times q(t) + 41,6$$

1. *Déterminer l'expression de $q(t)$.*

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$q(t) = k \times e^{-2,08 \times t} - \frac{41,6}{-2,08} = k \times e^{-2,08 \times t} + 20 \text{ , } k \in \mathbb{R}$$

Or :

$$
\begin{aligned}
& q(0) = 100 \\
\Leftrightarrow\ & k \times e^{-2,08 \times 0} + 20 = 100 \\
\Leftrightarrow\ & k = 100 - 20 = 80
\end{aligned}
$$

Donc $\quad q(t) = 80e^{-2,08 \times t} + 20$

2. *Déterminer le sens de variation de la fonction q sur $[0;+\infty[$.*

$$q'(t) = 80 \times (-2,08)e^{-2,08 \times t} = -16,64e^{-2,08 \times t}$$

Pour tout réel positif t : $e^{-2,08 \times t} > 0$.

Donc $\forall x \in [0;+\infty[$: $q'(t) < 0$ et la fonction q est strictement décroissante.

3. *Calculer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter ce résultat.*

On pose $\mathrm{T} = -2,08t$:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-2,08\times t} = \lim_{\mathrm{T}\to-\infty} e^{\mathrm{T}} = 0$$

Par produit et par somme :

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = 20 .$$

La température de ce corps finira par être égale à la température ambiante.

4. *Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes puis au bout de 30 minutes.*

Le temps est en heure :

$$20 \text{ minutes} = \frac{1}{3} \text{ d'heure } \rightarrow q\left(\frac{1}{3}\right) = 80e^{-2,08\times\frac{1}{3}} + 20 \simeq 60\,°C$$

$$30 \text{ minutes} = \frac{1}{2} \text{ d'heure } \rightarrow q\left(\frac{1}{2}\right) = 80e^{-2,08\times\frac{1}{2}} + 20 \simeq 48\,°C$$

5. *Déterminer la valeur exacte du temps au bout duquel le corps tombera à 30 °C.*
En donner une valeur approchée.

$$q(t) = 30$$
$$\Leftrightarrow \quad 80e^{-2,08\times t} + 20 = 30$$
$$\Leftrightarrow \quad 80e^{-2,08\times t} = 30 - 20$$
$$\Leftrightarrow \quad 80e^{-2,08\times t} = 10$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{-2,08\times t} = \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow \quad -2,08\times t = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad -2,08\times t = -\ln 8$$
$$\Leftrightarrow \quad 2,08\times t = \ln 8$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 8}{2,08} \simeq 0,9997$$

Soit au bout d'une heure.