Exercice 5D.1 :

On s'intéresse à la chute d'un parachutiste avant l'ouverture de son parachute. On admet que la vitesse du parachutiste pendant la chute, exprimée en m.s^{-1}, peut être modélisée par une fonction v, fonction du temps t, exprimé en seconde, solution de l'équation différentielle $(E): my'+ky=mg$, où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute, g l'accélération de la pesanteur et k un coefficient dépendant de la résistance de l'air.

On prendra $m=80\,\text{kg}$, $g=10\,\text{m.s}^{-2}$ et $k=25$.

1) Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle $(E): y'=-0,3125y+10$.
2) Résoudre l'équation différentielle (E).
3) Sachant que $v(0)=0$, montrer que, pour tout réel $t\geq 0$, $v(t)=32\left(1-e^{-0,3125t}\right)$.
4) Etudier les variations de la vitesse.
5) Quelle vitesse limite ce parachutiste peut-il espérer atteindre ? Exprimer le résultat en km.h^{-1}.
6) Au bout de combien de temps le parachutiste atteint-il une vitesse de 100 km.h^{-1} ?

Exercice 5D.2 :

Pour déterminer l'âge des résidus organiques, on utilise la méthode basée sur la désintégration radioactive. Les êtres vivants absorbent et assimilent du carbone de l'atmosphère. On considère que leur organisme comporte une proportion constante de carbone 14. Après leur mort, cette proportion de carbone 14 diminue lentement.

Soit m la fonction qui donne la masse résiduelle $m(t)$, en gramme, de carbone 14 dans un échantillon à la date t, en siècle. La vitesse de désintégration $m'(t)$ du carbone 14 à la date t est proportionnelle à la masse à cet instant. Ainsi il existe un réel C tel que $m'(t)=\text{C}\times m(t)$. y' = ay

Un corps organique contenait une masse m_0 de carbone 14 à l'instant $t=0$ de sa mort.

a) Exprimer $m(t)$ en fonction de C et de m_0.
b) On sait que la masse de carbone 14 dans un échantillon diminue de 1,24 % par siècle.
   En déduire la valeur de C.
c) Aujourd'hui, ce corps organique ne contient plus que 14 % de sa masse m_0 de carbone 14.
   Déterminer l'âge de ce corps. Arrondir au centième.

Exercice 5D.3 :

Un charriot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale.
$x(t)$ est la distance, en mètre, qui le sépare de l'origine en fonction du temps t, en seconde $(t\geq 0)$.

D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie : $200x''+25x'=50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps.

1. Déterminer $x(0)$.
2. $v(t)$ est la vitesse du charriot à l'instant t et vérifie $v(t)=x'(t)$.
   a) Démontrer que x vérifie : $200x''+25x'=50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie :
   $$v'=-0,125v+0,25.$$
   b) Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation différentielle :
   $$y'=-0,125y+0,25.$$
   c) La vitesse initiale du charriot étant supposée nulle, ainsi $v(0)=0$.
   Déterminer alors la vitesse $v(t)$ pour tout réel t.
   d) Etudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter ce résultat.
3. a) Démontrer alors que la fonction x est définie sur $[0;+\infty[$ par : $x(t)=2t-16+16e^{-0,125t}$.
   b) Quelle est la distance, en m, parcourue par le charriot au bout de 30 secondes? (arrondir au centième)

Exercice 5D.1 :

On s'intéresse à la chute d'un parachutiste avant l'ouverture de son parachute. On admet que la vitesse du parachutiste pendant la chute, exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$, *peut être modélisée par une fonction* v, *fonction du temps* t, *exprimé en seconde, solution de l'équation différentielle* $(E) : my' + ky = mg$, *où* m *est la masse totale du parachutiste et de son parachute,* g *l'accélération de la pesanteur et* k *un coefficient dépendant de la résistance de l'air. On prendra* $m = 80\,\mathrm{kg}$, $g = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$ *et* $k = 25$.

1) *Montrer que la fonction* v *est solution de l'équation différentielle* $(E) : y' = -0,3125y + 10$.

L'équation différentielle $(E) : my' + ky = mg$, avec les données d'énoncé, s'écrit :

$$\begin{aligned}
&(E) : 80y' + 25y = 80 \times 10 \\
\Leftrightarrow\ &(E) : 80y' = -25y + 800 \\
\Leftrightarrow\ &(E) : y' = -0,3125y + 10
\end{aligned}$$

2) *Résoudre l'équation différentielle* (E).

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y(t) = ke^{-0,3125t} - \frac{10}{-0,3125} = ke^{-0,3125t} + 32\ ,\ k \in \mathbb{R}.$$

3) *Sachant que* $v(0) = 0$, *montrer que, pour tout réel* $t \geq 0$, $v(t) = 32\left(1 - e^{-0,3125t}\right)$.

$$v(0) = 0 \ \Leftrightarrow\ ke^{-0,3125\times 0} + 32 = 0 \ \Leftrightarrow\ k = -32$$

Donc $v(t) = 32\left(1 - e^{-0,3125t}\right)$.

4) *Etudier les variations de la vitesse.*

La fonction vitesse est dérivable pour tout réel $t \geq 0$:

$$v'(t) = 32 \times 0,3125e^{-0,3125t} = 10e^{-0,3125t}$$

La dérivée est strictement positive donc la vitesse est strictement croissante.

5) *Quelle vitesse limite ce parachutiste peut-il espérer atteindre ? Exprimer le résultat en* $\mathrm{km.h^{-1}}$.

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-0,3125t} = 0$$

donc par différence et par produit :

$$\lim_{t \to +\infty} 32\left(1 - e^{-0,3125t}\right) = 32$$

Le parachutiste peut espérer atteindre une vitesse de 32 $\mathrm{m.s^{-1}}$, soit :

$$32\,\mathrm{m.s^{-1}} \ \Leftrightarrow\ 32 \times 3600\ \mathrm{m.h^{-1}} \ \Leftrightarrow\ \frac{32 \times 3600}{1000}\ \mathrm{km.h^{-1}} \ \Leftrightarrow\ 115,2\ \mathrm{km.h^{-1}}$$

6) *Au bout de combien de temps le parachutiste atteint-il une vitesse de 100* $\mathrm{km.h^{-1}}$ *?*

$$100\,\mathrm{km.h^{-1}} \ \Leftrightarrow\ 100\ 000\ \mathrm{m.h^{-1}} \ \Leftrightarrow\ \frac{100\ 000}{3\ 600}\ \mathrm{m.s^{-1}} \ \Leftrightarrow\ \frac{250}{9}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
v(t) \geq \frac{250}{9} \ &\Leftrightarrow\ 32\left(1 - e^{-0,3125t}\right) \geq \frac{250}{9} \ \Leftrightarrow\ 1 - e^{-0,3125t} \geq \frac{250}{9 \times 32} \\
&\Leftrightarrow\ -e^{-0,3125t} \geq \frac{250}{9 \times 32} - 1 \ \Leftrightarrow\ e^{-0,3125t} \leq 1 - \frac{250}{288} \\
&\Leftrightarrow\ -0,3125t \leq \ln\left(\frac{144}{144} - \frac{125}{144}\right) \ \Leftrightarrow\ t \geq \frac{1}{-0,3125}\ln\left(\frac{19}{144}\right)
\end{aligned}$$

Soit à partir d'environ 6,5 s.

Exercice 5D.2 :

Pour déterminer l'âge des résidus organiques, on utilise la méthode basée sur la désintégration radioactive. Les êtres vivants absorbent et assimilent du carbone de l'atmosphère. On considère que leur organisme comporte une proportion constante de carbone 14. Après leur mort, cette proportion de carbone 14 diminue lentement. Soit m la fonction qui donne la masse résiduelle $m(t)$, en gramme, de carbone 14 dans un échantillon à la date t, en siècle. La vitesse de désintégration $m'(t)$ du carbone 14 à la date t est proportionnelle à la masse à cet instant. Ainsi il existe un réel C tel que $m'(t) = \mathrm{C} \times m(t)$.

Un corps organique contenait une masse m_0 de carbone 14 à l'instant $t = 0$ de sa mort.

a) *Exprimer $m(t)$ en fonction de C et de m_0.*

Les solutions de l'équation différentielle $m'(t) = \mathrm{C} \times m(t)$ sont :

$$m(t) = k \times e^{\mathrm{C} \times t}.$$

Or $m(0) = m_0$ donc :

$$k \times e^{\mathrm{C} \times 0} = m_0 \quad \Leftrightarrow \quad k = m_0.$$

La masse résiduelle est :

$$m(t) = m_0 \times e^{\mathrm{C} \times t}$$

b) *On sait que la masse de carbone 14 dans un échantillon diminue de 1,24 % par siècle. En déduire la valeur de C.*

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 1,24 % est égal à 0,9876.

$$m(t) - 1,24\% \times m(t) = (100\% - 1,24\%) \times m(t) = (1 - 0,0124) \times m(t) = 0,9876 \times m(t)$$

Ainsi : $m(t+1) = 0,9876 \times m(t)$

$$\Leftrightarrow m_0 \times e^{\mathrm{C} \times (t+1)} = 0,9876 \times m_0 \times e^{\mathrm{C} \times t}$$

$$\Leftrightarrow e^{\mathrm{C} \times (t+1)} = 0,9876 \times e^{\mathrm{C} \times t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\mathrm{C} \times (t+1)}}{e^{\mathrm{C} \times t}} = 0,9876$$

$$\Leftrightarrow e^{\mathrm{C}} = 0,9876$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{\mathrm{C}}\right) = \ln 0,9876$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{C} = \ln 0,9876$$

c) *Aujourd'hui, ce corps organique ne contient plus que 14 % de sa masse m_0 de carbone 14. Déterminer l'âge de ce corps. Arrondir au centième.*

La masse résiduelle est :

$$m(t) = m_0 \times e^{\ln 0,9876 \times t}.$$

Ainsi : $m(t) = 0,14 \times m_0$

$$\Leftrightarrow m_0 \times e^{\ln 0,9876 \times t} = 0,14 \times m_0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln 0,9876 \times t} = 0,14$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{\ln 0,9876 \times t}\right) = \ln 0,14$$

$$\Leftrightarrow \ln 0,9876 \times t = \ln 0,14$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,14}{\ln 0,9876} \simeq 157,57$$

→ce corps organique a environ 15757 ans.

Exercice 5D.3 :

Un charriot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale.
$x(t)$ est la distance, en mètre, qui le sépare de l'origine en fonction du temps t, en seconde $(t \geq 0)$.
D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie : $200x''+25x'=50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps.

1. *Déterminer $x(0)$.*

Le charriot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O donc $x(0)=0$.

2. *$v(t)$ est la vitesse du charriot à l'instant t et vérifie $v(t)=x'(t)$.*

a) *Démontrer que x vérifie : $200x''+25x'=50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie :*
$v'=-0{,}125v+0{,}25$.

Si x vérifie $200x''+25x'=50$ avec $v(t)=x'(t)$, alors :

$$200v'+25v=50 \Leftrightarrow 200v'=-25v+50 \Leftrightarrow v'=\frac{-25v+50}{200}=-0{,}125v+0{,}25.$$

b) *Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation différentielle :*
$y'=-0{,}125y+0{,}25$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'=-0{,}125y+0{,}25$ sont *:*

$$y=k\times e^{-0{,}125t}+\frac{0{,}25}{0{,}125}=k\times e^{-0{,}125t}+2\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

c) *La vitesse initiale du charriot étant supposée nulle, ainsi $v(0)=0$.*

Déterminer alors la vitesse $v(t)$ pour tout réel t.

La fonction vitesse est de la forme :

$$v(t)=k\times e^{-0{,}125t}+2 \quad \text{avec} \quad v(0)=0$$

Soit $k\times e^{-0{,}125\times 0}+2=0 \Leftrightarrow k+2=0 \Leftrightarrow k=-2$

Ainsi $v(t)=-2e^{-0{,}125t}+2$.

d) *Etudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter ce résultat.*

On pose $T=-0{,}125t$. Ainsi :

$$\lim_{t\to+\infty} -2e^{-0{,}125t}+2=\lim_{T\to-\infty} -2e^{T}+2=2$$

La vitesse va augmenter jusqu'à se stabiliser à 2 m/s.

3. **a)** *Démontrer alors que la fonction x est définie sur $[0;+\infty[$ par : $x(t)=2t-16+16e^{-0{,}125t}$.*

Les primitives de la fonction v, définie par $v(t)=-2e^{-0{,}125t}+2$, sont :

$$y(t)=\frac{-2}{-0{,}125}e^{-0{,}125t}+2t+k=16e^{-0{,}125t}+2t+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

Or $x(0)=0$ donc la fonction x vérifie :

$$16e^{-0{,}125\times 0}+2\times 0+k=0 \Leftrightarrow 16+k=0 \Leftrightarrow k=-16.$$

Ainsi : $x(t)=16e^{-0{,}125t}+2t-16$

b) *Quelle est la distance, en m, parcourue par le charriot au bout de 30 secondes ?(arrondir au centième)*

$$x(30)=16e^{-0{,}125\times 30}+2\times 30-16\simeq 44{,}38.$$

Le charriot aura parcouru environ 44,38 m.