Exercice 5E.1 :

Au début d'une épidémie, on constate que 0,01 % de la population est contaminée.

Pour $t \in [0;30]$, on note $f(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc : $f(0)=0,01$.

On admet que la fonction f est dérivable et strictement positive sur $[0;30]$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(E): y' = 0,05y(1-y)$.

1. Soit la fonction g définie sur $[0;30]$ par $g(t)=\dfrac{1}{f(t)}$.
   a) Calculer $g(0)$.
   b) Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (F) : $y' = -0,05y + 0,05$.
   c) Résoudre (F). En déduire l'expression de $g(t)$ en fonction de t.
2. a) Montrer que, pour tout réel $t \in [0;30]$:
$$f(t)=\frac{1}{99e^{-0,05t}+1}.$$
   b) Calculer, au centième près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.

Exercice 5E.2 :

En 1980, 10 000 ménages vivant en France étaient équipés d'un ordinateur. On note $f(t)$ le nombre de ces ménages, en million, t années après 1980 $(t \geq 0)$.

Le modèle de Verhulst estime que sur la période 1980-2020, f est solution de l'équation différentielle $(E_1): y' = 0,022y(20-y)$.

1. a) On pose $u=\dfrac{1}{f}$. Démontrer que f est solution de (E_1) si, et seulement si, u est solution sur $[0;40]$ de l'équation différentielle $(E_2): y' = -0,44y + 0,022$.
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_2).
   c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).
   d) Démontrer alors que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;40]$ par $f(t)=\dfrac{20}{1+1999e^{-0,44t}}$.
2. D'après l'INSEE, en 2014, la France comptait 28 765,9 milliers de ménages dont 78,8 % étaient équipés d'un ordinateur. Expliquer pourquoi l'estimation faite par ce modèle est incorrecte.

Exercice 5E.3 :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1) Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.
2) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.

Partie B

1) On a étudié l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, en centaine d'individus, au temps *t*, en années, est notée $g(t)$. La fonction g, définie de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, modèle choisi pour décrire cette évolution, est une solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}.$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

   c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps *t* (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions $(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u^2(t)}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$.

   a) On suppose que u ne s'annule pas pour $t>0$.

   Soit la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h = \dfrac{1}{u}$.

   Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions : $(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

   b) Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction *u*.

   c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque *t* tend vers $+\infty$.

Exercice 5E.1 :

Au début d'une épidémie, on constate que 0,01 % de la population est contaminée.

Pour $t \in [0;30]$, *on note* $f(t)$ *le pourcentage de personnes touchées par la maladie après* t *jours. On a donc :* $f(0) = 0,01$.

On admet que la fonction f *est dérivable et strictement positive sur* $[0;30]$ *et qu'elle est solution de l'équation différentielle* $(E): y' = 0,05y(1-y)$.

1. *Soit la fonction* g *définie sur* $[0;30]$ *par* $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

a) *Calculer* $g(0)$.

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{0,01} = 100.$$

b) *Montrer que la fonction* g *est solution de l'équation différentielle* $(F): y' = -0,05y + 0,05$.

$$g(t) = \frac{1}{f(t)} \text{ donc } g'(t) = \frac{-f'(t)}{(f(t))^2}.$$

Or la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E): y' = 0,05y(1-y)$ donc :

$$f'(t) = 0,05 \times f(t) \times (1 - f(t))$$

Ainsi :

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{(f(t))^2} = \frac{-[0,05 \times f(t) \times (1 - f(t))]}{(f(t))^2} = \frac{-0,05 \times (1 - f(t))}{f(t)} = \frac{-0,05}{f(t)} + 0,05$$

$$= -0,05 \times \frac{1}{f(t)} + 0,05 = -0,05g(t) + 0,05$$

La fonction g est solution de l'équation différentielle $(F): y' = -0,05y + 0,05$.

c) *Résoudre* (F). *En déduire l'expression de* $g(t)$ *en fonction de* t.

Les solutions des équations différentielles de la forme :

$$y' = ay + b \ , \ a, b \in \mathbb{R}$$

sont :

$$y(t) = k \times e^{a \times t} - \frac{b}{a} \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (F) sont :

$$y(t) = k \times e^{-0,05t} - \frac{0,05}{-0,05} = k \times e^{-0,05t} + 1 \ , \ k \in \mathbb{R}$$

2. **a)** *Montrer que, pour tout réel* $t \in [0;30]$ *:* $f(t) = \dfrac{1}{99e^{-0,05t} + 1}$.

Nous savons que $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$, donc :

$$f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{k \times e^{-0,05t} + 1} \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

Or $f(0) = 0,01$ *donc :*

$$f(0) = 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{k \times e^{-0,05 \times 0} + 1} = 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} = 0,01 \Leftrightarrow 1 = 0,01(k+1)$$

$$\Leftrightarrow\ 1=0,01k+0,01\ \Leftrightarrow\ 1-0,01=0,01k\ \Leftrightarrow\ \frac{0,99}{0,01}=k\ \Leftrightarrow\ 99=k$$

Ainsi $f(t)=\dfrac{1}{99e^{-0,05t}+1}$

b) *Calculer, au centième près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.*

$$f(30)=\frac{1}{99e^{-0,05\times 30}+1}\simeq 0,0433$$

Environ 0,04 % de la population serait contaminée au bout de 30 jours selon ce modèle.

Exercice 5E.2 :

En 1980, 10 000 ménages vivant en France étaient équipés d'un ordinateur. On note $f(t)$ le nombre de ces ménages, en million, t années après 1980 $(t\geq 0)$. Le modèle de Verhulst estime que sur la période 1980-2020, f est solution de l'équation différentielle $(E_1): y'=0,022y(20-y)$.

1. a) *On pose $u=\dfrac{1}{f}$. Démontrer que f est solution de (E_1) si, et seulement si, u est solution sur $[0;40]$ de l'équation différentielle $(E_2): y'=-0,44y+0,022$.*

Si f *est solution de* (E_1), alors :

$$f'(t)=0,022f(t)(20-f(t))$$

On pose $u(t)=\dfrac{1}{f(t)}$ donc $u'(t)=-\dfrac{f'(t)}{f^2(t)}$. Ainsi :

$$u'(t)=-\frac{f'(t)}{f^2(t)}=\frac{-[0,022f(t)(20-f(t))]}{f^2(t)}=\frac{-0,022(20-f(t))}{f(t)}=\frac{0,44-0,022f(t)}{f(t)}$$

$$=\frac{0,44}{f(t)}-0,022=0,44\times\frac{1}{f(t)}-0,022=-0,44\times u(t)+0,022$$

u est solution sur $[0;40]$ de l'équation différentielle $(E_2): y'=-0,44y+0,022$.

b) *Déterminer l'ensemble des solutions de (E_2).*

Les solutions de l'équation différentielle $(E_2): y'=-0,44y+0,022$ sont :

$$y=k\times e^{(-0,44)t}+\frac{0,022}{0,44}=k\times e^{-0,44t}+0,05\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

c) *En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).*

La relation $u(t)=\dfrac{1}{f(t)}$ équivaut à :

$$f(t)=\frac{1}{u(t)}=\frac{1}{k\times e^{-0,44t}+0,05}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

d) *Démontrer alors que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;40]$ par $f(t)=\dfrac{20}{1+1999e^{-0,44t}}$.*

D'après l'énoncé : En 1980, 10 000 ménages vivant en France étaient équipés d'un ordinateur, donc

$$f(0)=0,01\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{k\times e^{-0,44\times 0}+0,05}=0,01\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{k+0,05}=0,01\ \Leftrightarrow\ 1=0,01(k+0,05)$$

$$\Leftrightarrow\ 1=0,01k+0,0005\ \Leftrightarrow\ 0,9995=0,01k\ \Leftrightarrow\ \frac{0,9995}{0,01}=k\ \Leftrightarrow\ k=99,95$$

La fonction f s'écrit :

$$f(t)=\frac{1}{99{,}95\times e^{-0{,}44t}+0{,}05}\times\frac{20}{20}=\frac{20}{1999\times e^{-0{,}44t}+1}.$$

2. *D'après l'INSEE, en 2014, la France comptait 28 765,9 milliers de ménages dont 78,8 % étaient équipés d'un ordinateur. Expliquer pourquoi l'estimation faite par ce modèle est incorrecte.*
L'année 2014 correspond à $t=34$.
La fonction f trouvée donne :

$$f(34)=\frac{20}{1999\times e^{-0{,}44\times 34}+1}\simeq 19{,}987$$

Soit près de 20 millions de ménages équipés d'un ordinateur.
Or : $28765{,}9\times 78{,}8\%=22667{,}5292$ soit environ 22,7 millions de ménages équipés.
Le modèle de Verhulst, mis en place en 1980, est assez fiable de l'évolution générale.

Exercice 5E.3 :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1) *Démontrer que* $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

$$f(x)=\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}=\frac{e^{\frac{x}{4}}\times 3}{e^{\frac{x}{4}}\times\left(\frac{2}{e^{\frac{x}{4}}}+1\right)}=\frac{3}{\frac{2}{e^{\frac{x}{4}}}+1}=\frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1}$$

2) *Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*

On pose $X=-\dfrac{x}{4}$, ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}}=\lim_{X\to-\infty} e^{X}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{4}}=\lim_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$$

Par produit, somme et quotient, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

3) *Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.*

$$f'(x)=\frac{3\times\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\times\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)-3e^{\frac{x}{4}}\times\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\times\left(6+3e^{\frac{x}{4}}-3e^{\frac{x}{4}}\right)}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{6e^{\frac{x}{4}}}{4\times\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}$$

Pour tout réel x, numérateur et dénominateur sont strictement positifs, donc la dérivée est strictement positive et la fonction f est strictement croissante.

Partie B

1) *On a étudié l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, en centaine d'individus, au temps t, en années, est notée $g(t)$. La fonction g, définie de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, modèle choisi pour décrire cette évolution, est une solution de l'équation différentielle :*

$$(E_1) : y'=\frac{y}{4}.$$

a) *Résoudre l'équation différentielle (E_1).*

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :

$$y(t) = ke^{\frac{t}{4}} \text{ , } k \in \mathbb{R} .$$

b) *Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.*

La fonction $g(x) = ke^{\frac{x}{4}}$, $k \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation (E_1) :

$$ke^{\frac{0}{4}} = 1 \iff k = 1$$

Ainsi : $g(t) = e^{\frac{t}{4}}$

c) *Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?*

$$g(t) > 0 \iff e^{\frac{t}{4}} > 3 \iff \frac{t}{4} > \ln 3 \iff t > 4\ln 3$$

Soit $t > 4{,}394$, c'est à dire dans 5 ans.

2) *En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions* $(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u^2(t)}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$.

a) *On suppose que u ne s'annule pas pour $t > 0$.*

Soit la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h = \dfrac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions : $(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

La relation $h(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ donne : $h'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Ainsi, d'après les conditions (E_2) :

$$h'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = \frac{-\left(\frac{u(t)}{4} - \frac{u^2(t)}{12}\right)}{u^2(x)} = \frac{-u(t)\left(\frac{1}{4} - \frac{u(t)}{12}\right)}{u^2(x)} = \frac{-\left(\frac{1}{4} - \frac{u(t)}{12}\right)}{u(t)}$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{u(t)} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$$

avec : $h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

La fonction h vérifie les conditions (E_3).

b) *Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.*

Les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont :

$$y(t) = ke^{-\frac{t}{4}} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = ke^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{12} \times 4 = ke^{-\frac{t}{4}} + 3\text{ , } k \in \mathbb{R}$$

La fonction *h* vérifie (E_3) avec $h(0) = 1$:

$$ke^{-\frac{0}{4}} + 3 = 1 \iff k + 3 = 1 \iff k = -2$$

Ainsi : $h(t) = -2e^{-\frac{t}{4}} + 3$

D'où : $u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{3 - 2e^{-\frac{t}{4}}}$

c) *Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers* $+\infty$.

On pose $\mathrm{T} = -\frac{t}{4}$, ainsi :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{4}} = \lim_{\mathrm{T} \to -\infty} e^{\mathrm{T}} = 0\text{ .}$$

Par produit, somme et quotient, on obtient :

$$\lim_{t \to +\infty} h(x) = \frac{1}{3} \text{ soit environ 33 rongeurs.}$$