Exercice 5F.1 :

Deux cuves A et B sont séparées par une membrane poreuse. On injecte 10 cm^3 d'un gaz dans la cuve A à un instant $t=0$ alors que la cuve B est laissée vide. Ce gaz se diffuse en permanence entre les deux cuves et une partie est rejetée vers l'extérieur.

On appelle respectivement $\text{A}(t)$ et $\text{B}(t)$ le volume en cm^3 de ce gaz dans les cuves A et B à l'instant t (exprimé en heure). On a donc $\text{A}(0)=10$ et $\text{B}(0)=0$.

On admet que les fonctions A et B sont définies et dérivables sur $[0;+\infty[$ et vérifient les équations différentielles $\text{A}'(t)=-5\times\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)$ et $\text{B}'(t)=2\times\text{A}(t)-2\times\text{B}(t)$.

On définit de plus sur $[0;+\infty[$ deux fonctions f et g par $f(t)=\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)$ et $g(t)=-2\times\text{A}(t)+\text{B}(t)$

a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

b) Déterminer, pour tout $t>0$, $f'(t)$ et $g'(t)$ et en déduire que f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y'=ay$.

c) Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout $t>0$, $f(t)$ et $g(t)$.
En déduire $\text{A}(t)$ et $\text{B}(t)$.

d) Avec GeoGebra, construire les courbes représentatives des fonctions A et B sur $[0;2]$ et déterminer expérimentalement l'instant T, arrondi à 10^{-2}, pour lequel les deux cuves contiendront le même volume V de gaz dont on donnera un arrondi à 10^{-3}.

Exercice 5F.1 :

Deux cuves A et B sont séparées par une membrane poreuse. On injecte 10 cm^3 *d'un gaz dans la cuve A à un instant* $t=0$ *alors que la cuve B est laissée vide. Ce gaz se diffuse en permanence entre les deux cuves et une partie est rejetée vers l'extérieur. On appelle respectivement* $\text{A}(t)$ *et* $\text{B}(t)$ *le volume en* cm^3 *de ce gaz dans les cuves A et B à l'instant* t *(exprimé en heure). On a donc* $\text{A}(0)=10$ *et* $\text{B}(0)=0$.

On admet que les fonctions A et B sont définies et dérivables sur $[0;+\infty[$ *et vérifient les équations différentielles* $\text{A}'(t)=-5\times\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)$ *et* $\text{B}'(t)=2\times\text{A}(t)-2\times\text{B}(t)$.

On définit de plus sur $[0;+\infty[$ *deux fonctions* f *et* g *par* $f(t)=\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)$ *et* $g(t)=-2\times\text{A}(t)+\text{B}(t)$

a) *Calculer* $f(0)$ *et* $g(0)$.

$$f(0)=\text{A}(0)+2\times\text{B}(0)=10$$
$$g(0)=-2\times\text{A}(0)+\text{B}(0)=-20$$

b) *Déterminer, pour tout* $t>0$, $f'(t)$ *et* $g'(t)$ *et en déduire que* f *et* g *sont solutions de deux équations différentielles de la forme* $y'=ay$.

Pour tout $t>0$:

$$\begin{aligned}f'(t)&=\text{A}'(t)+2\times\text{B}'(t)\\&=-5\times\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)+2\times\left[2\times\text{A}(t)-2\times\text{B}(t)\right]\\&=-\text{A}(t)-2\times\text{B}(t)\\&=-\left[\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)\right]\\&=-f(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(t)&=-2\times\text{A}'(t)+\text{B}'(t)\\&=-2\times\left[-5\times\text{A}(t)+2\times\text{B}(t)\right]+2\times\text{A}(t)-2\times\text{B}(t)\\&=12\text{A}(t)-6\times\text{B}(t)\\&=-6\left(-2\text{A}(t)+\text{B}(t)\right)\\&=-6\times g(t)\end{aligned}$$

f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y'=ay$:

$$f'(t)=-f(t) \quad \text{et} \quad g'(t)=-6\times g(t).$$

c) *Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout* $t>0$, $f(t)$ *et* $g(t)$.

En déduire $\text{A}(t)$ *et* $\text{B}(t)$.

Ainsi :

$$f(t)=k\times e^{-t}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$
$$g(t)=c\times e^{-6t}\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

Or $f(0)=10$ donc :

$$k\times e^{-0}=10 \iff k=10$$
$$\rightarrow f(t)=10e^{-t}$$

Or $g(0)=-20$ donc :

$$c\times e^{-6\times 0}=-20 \iff c=-20$$
$$\rightarrow g(t)=-20e^{-6t}$$

Pour trouver $A(t)$ et $B(t)$, on doit résoudre le système :

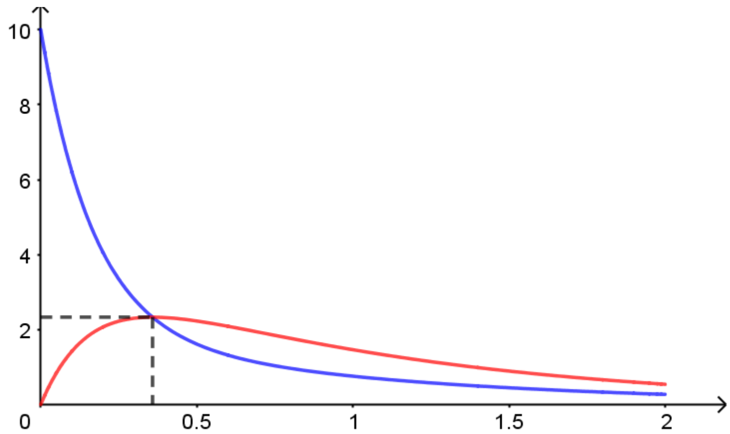
$$\begin{cases} A(t)+2\times B(t)=f(t) \\ -2\times A(t)+B(t)=g(t) \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times A(t)+4\times B(t)=2\times f(t) \\ -2\times A(t)+B(t)=g(t) \end{cases} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_1+L_2 \end{vmatrix} \begin{cases} 2\times A(t)+4\times B(t)=2\times f(t) \\ 4\times B(t)+B(t)=2\times f(t)+g(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(t)+2\times B(t)=f(t) \\ 5\times B(t)=2\times f(t)+g(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(t)+2\times B(t)=f(t) \\ B(t)=\frac{1}{5}\left[2\times 10e^{-t}-20e^{-6t}\right]=4e^{-t}-4e^{-6t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(t)=f(t)-2\times B(t) \\ B(t)=4\left(e^{-t}-e^{-6t}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(t)=10e^{-t}-2\times 4\left(e^{-t}-e^{-6t}\right)=2e^{-t}+8e^{-6t} \\ B(t)=4\left(e^{-t}-e^{-6t}\right) \end{cases}$$

d) *Avec GeoGebra, construire les courbes représentatives des fonctions A et B sur* $[0;2]$ *et déterminer expérimentalement l'instant T, arrondi à* 10^{-2}*, pour lequel les deux cuves contiendront le même volume V de gaz dont on donnera un arrondi à* 10^{-3}.



Les deux cuves contiendront le même volume V de gaz pour :

$t \simeq 0,36$ heure, soit 24,6 minutes, soit 24 minutes et 36 secondes.

Le volume de gaz commun sera égal à 2,329 cm^3.