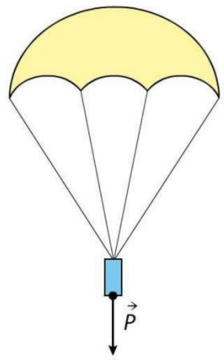
Equation du mouvement du parachutiste

Un objet relié à un parachute est largué à l'instant $t=0$ en un point O.
On admet que sa trajectoire est verticale et que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de pénétration dans l'air et on note *k* le coefficient de proportionnalité.
A chaque instant t, exprimé en secondes, on désigne par $v(t)$ la vitesse de l'objet et par $h(t)$ son altitude.



On admet, le principe fondamental de physique (ou loi de Newton) :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\times\vec{v} \quad avec\ a = \frac{dv}{dt} = v'\ ,\ soit : \qquad mv' = -mg - k\times v$$

On obtient l'équation (E) : $mv' + k\times v = -mg$

où *m* est la masse totale, en kg, de l'objet et du parachute et *g* le coefficient d'accélération de la pesanteur.

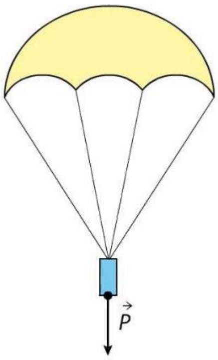
1) On prend : $m=8$ kg, $g=10$ m.s^{-2} et $k=25$ unités SI .
   On suppose que l'altitude, en mètres, du point O est $h(0)=100$ et que la vitesse initiale $v(0)$ est nulle.
   a) Déterminer $v(t)$ en fonction de *t*, à partir de l'équation (E).
   b) En considérant que $v = \frac{dh}{dt} = h'$, en déduire que l'équation du mouvement est définie par :
   $$h(t) = -1,024e^{-3,125t} - 3,2t + 101,024 .$$
   c) Démontrer que l'équation : $-1,024e^{-3,125t} - 3,2t + 101,024 = 0$ admet une unique solution t_1.
   d) En déduire une valeur approchée, à une seconde près, de la durée de la chute.
   e) En déduire une valeur approchée, à $0,1$ m.s^{-1}, de la vitesse à l'arrivée au sol.
2) Reprendre les questions précédentes, en supposant que l'objet est largué d'une altitude de 500 m.
3) Reprendre les questions précédentes, en supposant que l'objet est largué avec une vitesse verticale de 5 m.s^{-1}.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Un objet relié à un parachute est largué à l'instant $t=0$ en un point O.
On admet que sa trajectoire est verticale et que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de pénétration dans l'air et on note k le coefficient de proportionnalité.
A chaque instant t, exprimé en secondes, on désigne par $v(t)$ la vitesse de l'objet et par $h(t)$ son altitude.

On admet, le principe fondamental de physique (ou loi de Newton) :

$$m\vec{a}=m\vec{g}-k\times\vec{v} \quad \text{avec } a=\frac{dv}{dt}=v'\text{ , soit :} \qquad mv'=-mg-k\times v$$



On obtient l'équation (E) : $mv'+k\times v=-mg$

où m est la masse totale, en kg, de l'objet et du parachute et g le coefficient d'accélération de la pesanteur.

1) *On prend :* $m=8$ *kg ,* $g=10\ \mathrm{m.s}^{-2}$ *et* $k=25$ *unités SI .*
On suppose que l'altitude, en mètres, du point O est $h(0)=100$ *et que la vitesse initiale* $v(0)$ *est nulle.*

a) *Déterminer $v(t)$ en fonction de t, à partir de l'équation (E).*

L'équation (E) s'écrit :

$$m\times v'(t)+k\times v(t)=-mg$$
$$\Leftrightarrow\ 8\times v'(t)=-25\times v(t)-8\times 10$$
$$\Leftrightarrow\ v'(t)=-\frac{25}{8}\times v(t)-\frac{80}{8}$$
$$\Leftrightarrow\ v'(t)=-3{,}125\times v(t)-10$$

Donc : $v(t)=C\,e^{-3{,}125t}-\dfrac{-10}{-3{,}125}=C\,e^{-3{,}125t}-3{,}2\ ,\ C\in\mathbb{R}$

Or $v(0)=0$

Donc : $C\,e^{-3{,}125\times 0}-3{,}2=0 \ \Leftrightarrow\ C-3{,}2=0\ \Leftrightarrow\ C=3{,}2$

Ainsi : $v(t)=3{,}2e^{-3{,}125t}-3{,}2$

b) *En considérant que $v=\dfrac{dh}{dt}=h'$, en déduire que l'équation du mouvement est définie par :*

$$h(t)=-1{,}024e^{-3{,}125t}-3{,}2t+101{,}024.$$

La relation $v(t)=\dfrac{dh(t)}{dt}=h'(t)$ donne :

$$h(t)=3{,}2\times\frac{1}{-3{,}125}e^{-3{,}125t}-3{,}2t+C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

Soit : $h(t)=-1{,}024e^{-3{,}125t}-3{,}2t+C\ ,\ C\in\mathbb{R}$

Or $h(0)=100$

Donc $-1{,}024e^{-3{,}125\times 0}-3{,}2\times 0+C=100$
$\Leftrightarrow\ -1{,}024+C=100$
$\Leftrightarrow\ C=100+1{,}024=101{,}024$

Ainsi : $h(t)=-1{,}024e^{-3{,}125t}-3{,}2t+101{,}024$

c) *Démontrer que l'équation :* $-1{,}024e^{-3{,}125t}-3{,}2t+101{,}024=0$ *admet une unique solution* t_1.

La fonction $h(t)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, donc :

$$h'(t) = -1,024 \times (-3,125) e^{-3,125t} - 3,2 = 3,2e^{-3,125t} - 3,2 = 3,2\left(e^{-3,125t} - 1\right)$$

Signe de la dérivée :

$$h'(t) > 0 \iff e^{-3,125t} - 1 > 0 \iff e^{-3,125t} > 1 \iff -3,125t > \ln 1$$

$$\iff -3,125t > 0 \iff t < \frac{0}{-3,125} \iff t < 0$$

Or $t \geq 0$ donc la dérivée est strictement négative et la fonction $h(t)$ est strictement décroissante.

La fonction h est continue et strictement décroissante, $h(0) = 100$ et $h(50) \simeq -58,98$.

D'après le TVI, il existe un unique réel t_1 tel que : $h(t_1) = 0$.

d) *En déduire une valeur approchée, à une seconde près, de la durée de la chute.*
La chute s'arrête lorsque $h(t_1) = 0$.

Par dichotomie, on trouve $t_1 \simeq 32$ secondes.

e) *En déduire une valeur approchée, à* $0,1\ \text{m.s}^{-1}$, *de la vitesse à l'arrivée au sol.*
La vitesse d'arrivée au sol est :

$$v(32) = 3,2e^{-3,125 \times 32} - 3,2 \simeq -3,2\ \text{m.s}^{-1}.$$

Cette valeur est négative car la vitesse est dirigée vers le bas dans un repère où l'axe vertical est dirigé vers le haut.

2) *Reprendre les questions précédentes, en supposant que l'objet est largué d'une altitude de 500 m.*
Le calcul de la vitesse ne change pas :

$$v(t) = 3,2e^{-3,125t} - 3,2$$

L'équation du mouvement devient :

$$h(t) = -1,024e^{-3,125t} - 3,2t + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Or $\quad h(0) = 500$

Donc $\quad -1,024e^{-3,125 \times 0} - 3,2 \times 0 + C = 500$

$$\iff -1,024 + C = 500$$

$$\iff C = 500 + 1,024 = 501,024$$

Ainsi : $\quad h(t) = -1,024e^{-3,125t} - 3,2t + 501,024$

Durée de la chute :

$$h(t) = 0$$

$$\iff -1,024e^{-3,125t} - 3,2t + 501,024 = 0$$

On trouve « exactement » 156,57 secondes, soit : 2 minutes et 36,57 secondes.
La vitesse d'arrivée au sol est :

$$v(156,57) = 3,2e^{-3,125 \times 156,57} - 3,2 \simeq -3,2\ \text{m.s}^{-1}.$$

3) *Reprendre les questions précédentes, en supposant que l'objet est largué avec une vitesse verticale de 5 m.s*$^{-1}$.
Le calcul de la vitesse change :

$$v(t) = Ce^{-3,125t} - 3,2\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Or $\quad v(0) = -5$ (en valeur négative évidemment !)

Donc : $\quad Ce^{-3,125 \times 0} - 3,2 = -5 \iff C - 3,2 = -5 + 3,2 = -1,8$

Ainsi : $\quad v(t) = -1,8e^{-3,125t} - 3,2$

L'équation du mouvement devient :

$$h(t) = \frac{-1,8}{-3,125} e^{-3,125t} - 3,2t + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad h(t) = 0,576 e^{-3,125t} - 3,2t + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Or $\quad h(0) = 100$

Donc $\quad 0,576 e^{-3,125\times 0} - 3,2\times 0 + C = 100$

$$\Leftrightarrow \quad 0,576 + C = 100$$

$$\Leftrightarrow \quad C = 100 - 0,576 = 99,424$$

Ainsi **l'équation du mouvement** recherchée est :

$$h(t) = 0,576 e^{-3,125t} - 3,2t + 99,424$$

Durée de la chute :

$$h(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,576 e^{-3,125t} - 3,2t + 99,424 = 0$$

On trouve « exactement » 31,07 secondes.

La **vitesse d'arrivée au sol** est :

$$v(31,07) = 3,2 e^{-3,125\times 31,07} - 3,2 \simeq -3,2 \ \text{ m.s}^{-1}.$$