Exercice 6A.1

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = -5y + 20x + 19.$$

1) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 6A.2

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = 4y + 3x + 5.$$

1) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 6A.3

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = 4x^2 - 4x.$$

Déterminer les solutions de (E).

Indice : on pourra chercher une solution particulière de la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice 6A.4

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$x^2 y' + (x-1)y = 2x^2 - x.$$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E).

Exercice 6A.5

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$xy' - 2y = 5x + 6.$$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E).

Exercice 6A.1

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = -5y + 20x + 19.$$

1) *Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

On cherche une solution particulière de la forme $g(x) = ax + b$.

Ainsi : $g'(x) = a$.

La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) si :

$$g'(x) + 5 \times g(x) = 20x + 19$$

$$\Leftrightarrow a + 5 \times (ax + b) = 20x + 19$$

$$\Leftrightarrow a + 5ax + 5b = 20x + 19$$

$$\Leftrightarrow 5ax + (a + 5b) = 20x + 19$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ a + 5b = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{20}{5} = 4 \\ 5b = 19 - a = 19 - 4 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \dfrac{15}{5} = 3 \end{cases}$$

La fonction g solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

$$g(x) = 4x + 3$$

2) *En déduire l'ensemble des solutions de (E).*

Les solutions de l'équation $y' = -5y$ sont :

$$y = k \times e^{-5x} \text{ , } k \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$y = k \times e^{-5x} + 4x + 3 \text{ , } k \in \mathbb{R}$$

Exercice 6A.2

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = 4y + 3x + 5.$$

1) *Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

On cherche une solution particulière de la forme $g(x) = ax + b$.

Ainsi : $g'(x) = a$.

La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) si :

$$g'(x) - 4 \times g(x) = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow a - 4 \times (ax + b) = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow a - 4ax - 4b = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad -4ax+(a-4b)=3x+5$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4a=3 \\ a-4b=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=\dfrac{-3}{4} \\ -4b=5-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=\dfrac{-3}{4} \\ b=\dfrac{5-\left(\dfrac{-3}{4}\right)}{-4}=\dfrac{\dfrac{23}{4}}{-4}=-\dfrac{23}{16} \end{cases}$$

La fonction g solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

$$g(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{23}{16}$$

2) *En déduire l'ensemble des solutions de* (E).

Les solutions de l'équation $y'=4y$ sont :

$$y=k\times e^{4x}\ ,\ k\in\mathbb{R}\ .$$

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$y=k\times e^{4x}-\frac{3}{4}x-\frac{23}{16}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

Exercice 6A.3

Pour tout réel x, *on considère l'équation différentielle* (E) : $y'-2y=4x^2-4x$.

Déterminer les solutions de (E).

On cherche une solution particulière de la forme $u(x)=ax^2+bx+c$.

Ainsi : $\quad u'(x)=2ax+b$.

La fonction u est solution de l'équation différentielle (E) si :

$$u'(x)-2\times u(x)=4x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow \quad (2ax+b)-2\times\left(ax^2+bx+c\right)=4x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax+b-2ax^2+2bx+2c=4x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow \quad -2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=4x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a=4 \\ 2a+2b=-4 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{-2}=-2 \\ 2b=-4-2a=-4+4=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=\dfrac{0}{2}=0 \\ 2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

On obtient la solution particulière de (E):

$$u(x)=-2x^2$$

La solution de l'équation homogène : $y'-2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'=2y$ est :

$$y = ke^{2x} \ , \ k \in \mathbb{R} .$$

Les solutions de (E) sont :

$$y = ke^{2x} - 2x^2 \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Exercice 6A.4

Pour tout réel x*, on considère l'équation différentielle* (E) *:* $x^2 y' + (x-1)y = 2x^2 - x$.

Déterminer les réels a et b pour que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = ax + b$ *soit une solution de* (E).

On obtient :

$$g'(x) = a .$$

Si la fonction g est solution de (E), alors :

$$x^2 \times g'(x) + (x-1) \times g(x) = 2x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \ x^2 \times a + (x-1) \times (x+b) = 2x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \ ax^2 + x^2 + bx - x - b = 2x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \ ax^2 + (b-1)x - b = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} a = 1 \\ b - 1 = -1 \\ b = 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 . \\ b = 0 \end{cases}$$

La fonction g cherchée est :

$$g(x) = x .$$

Exercice 6A.5

Pour tout réel x*, on considère l'équation différentielle* (E) *:* $xy' - 2y = 5x + 6$.

Déterminer les réels a et b pour que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = ax + b$ *soit une solution de* (E).

On obtient :

$$g'(x) = a .$$

Si la fonction g est solution de (E), alors :

$$x \times g'(x) - 2 \times g(x) = 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow \ x \times a - 2 \times (ax + b) = 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow \ ax - 2ax - 2b = 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow \ (a - 2a)x - 2b = 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow \ -ax - 2b = 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} -a = 5 \\ -2b = 6 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a = -5 \\ b = -3 \end{cases}$$

La fonction g cherchée est :

$$g(x) = -5x - 3 .$$