Exercice 6B.1 Soit $(E) : y' + y = e^{-x}$, pour tout réel x.

1. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 6B.2 Soit $(E) : y' + 4y = 3xe^{2x}$, pour tout réel x.

1. Résoudre l'équation différentielle (dite sans second membre) :
   $(E') : y' + 4y = 0$.
2. Montrer que la solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right)e^{2x}$$
   est une solution particulière de (E).
3. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 6B.3 Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^{x}$.

1. Déterminer les réels a et a tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{x}$ est une solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).
3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 6B.4 Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = e^{2x}$.

1) Déterminer le réel a tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 6B.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.
2) En déduire que h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
3) Vérifier que g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).
4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B

Soit C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.
3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes.

Exercice 6B.6

On considère l'équation différentielle $(E) : y'-2y=e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'-2y=0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0 .
6. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

   Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{2x}$.

   On note C la courbe représentative de f dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

   a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

   b) Tracer C.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 6B.1

Soit $(E): y'+y=e^{-x}$, *pour tout réel* x.

1. *Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{-x}$ est une solution de (E).*

$$u'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-1)e^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

Ainsi : $u'(x)+u(x)=(1-x)e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}$

La fonction u est une solution de (E).

2. *En déduire toutes les solutions de (E).*

L'équation homogène est :

$$y'+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'=-y.$$

L'ensemble de solutions est :

$$y=ke^{-x} \text{ , } k\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont constituées de la somme des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière :

$$y=ke^{-x}+xe^{-x} \text{ , } k\in\mathbb{R}.$$

Exercice 6B.2

Soit $(E): y'+4y=3xe^{2x}$, *pour tout réel* x.

1. *Résoudre l'équation différentielle (dite sans second membre) : $(E'): y'+4y=0$.*

$$y'=-4y$$

Les solutions sont :

$$y=ke^{-4x} \text{ , } k\in\mathbb{R}$$

2. *Montrer que la solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x}$ est une solution particulière de (E).*

$$g'(x)=\frac{1}{2}\times e^{2x}+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)\times 2e^{2x}=\left(\frac{1}{2}+x-\frac{1}{6}\right)e^{2x}=\left(x+\frac{1}{3}\right)e^{2x}$$

Ainsi : $g'(x)+4\times g(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)e^{2x}+4\times\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x}=\left(x+\frac{1}{3}+2x-\frac{1}{3}\right)e^{2x}=3xe^{2x}.$

La solution particulière g est une solution particulière de (E).

3. *En déduire toutes les solutions de (E).*

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$y=ke^{-4x}+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x} \text{ , } k\in\mathbb{R}$$

Exercice 6B.3

Pour tout réel x, on considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=xe^{x}$.

1. *Déterminer les réels a et a tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=(ax+b)e^{x}$ est une solution de (E).*

$$u'(x)=a\times e^x+(ax+b)\times e^x=(ax+a+b)\times e^x$$

Pour que la fonction u soit une solution de (E), on doit avoir :

$$u'(x)-2\times u(x)=xe^x$$
$$\Leftrightarrow\ (ax+a+b)e^x-2\times(ax+b)e^x=xe^x$$
$$\Leftrightarrow\ (ax+a+b-2ax-2b)e^x=xe^x$$
$$\Leftrightarrow\ (-ax+a-b)e^x=xe^x$$
$$\Leftrightarrow\ -ax+a-b=x$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}-a=1\\ a-b=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}a=-1\\ b=a=-1\end{cases}$$

Ainsi : $u(x)=(-x-1)e^x$

2. *En déduire toutes les solutions de (E).*

L'équation homogène est :

$$y'-2y=0\ \Leftrightarrow\ y'=2y.$$

L'ensemble de solutions est :

$$y=ke^{2x}\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont constituées de la somme des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière :

$$y(x)=ke^{2x}+(-x-1)e^x\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

3. *Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.*

$$y(0)=0$$
$$\Leftrightarrow\ ke^{2\times0}+(-0-1)e^0=0$$
$$\Leftrightarrow\ k-1=0$$
$$\Leftrightarrow\ k=1$$

Ainsi : $y(x)=e^{2x}+(-x-1)e^x$

Exercice 6B.4 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+3y=e^{2x}$.

1) *Déterminer le réel a tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).*

Si $f(x)=ae^{2x}$, alors : $f'(x)=a\times 2e^{2x}=2ae^{2x}$.

f est solution de (E) si :

$$f'(x)+3f(x)=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow\ 2ae^{2x}+3\times ae^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow\ 5ae^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow\ 5a=1$$
$$\Leftrightarrow\ a=\frac{1}{5}$$

Ainsi $f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}$ est une solution particulière de (E).

2) *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).*

L'équation (E) s'écrit :

$$y' = -3y + e^{2x}$$

La solution générale est l'ensemble des fonctions h telles que :

$$h(x) = ke^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} \text{ , } k \in \mathbb{R}$$

3) *Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0)=1$.*

$$h(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad ke^{-3\times 0} + \frac{1}{5}e^{2\times 0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad k + \frac{1}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

La solution cherchée est :

$$h(x) = \frac{4}{5}e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$$

Exercice 6B.5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) *Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.*

L'équation (E') s'écrit :

$$y' = -2y$$

L'ensemble des solutions de (E') est :

$$y(x) = ke^{-2x} \text{ , } k \in \mathbb{R}$$

2) *En déduire que h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').*

Pour $k = \frac{9}{2}$, on obtient la fonction *h*. Donc *h* est solution de (E').

3) *Vérifier que g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).*

On obtient :

$$g'(x) = -3 \times (-3)e^{-3x} = 9e^{-3x}$$

Ainsi : $\quad g'(x) + 2g(x) = -3\times(-3)e^{-3x} = 9e^{-3x} + 2\times(-3)e^{-3x} = 3e^{-3x}$

La fonction g est solution de l'équation (E).

4) *En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).*

L'équation (E) peut s'écrire ainsi :

$$y' = -2y + 3e^{-3x}$$

Une solution est donnée par $g(x) + h(x) = -3e^{-3x} + \frac{9}{2}e^{-2x}$, on reconnait l'expression de la fonction f.

Partie B

Soit C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1) *Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*
2) Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.
3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes.

…

Exercice 6B.6 :

On considère l'équation différentielle $(E): y'-2y=e^{2x}$.

1. *Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{2x}$ est une solution de (E).*

$$u'(x)=1\times e^{2x}+x\times 2e^{2x}=(1+2x)e^{2x}$$
$$u'(x)-2u(x)=(1+2x)e^{2x}-2xe^{2x}=e^{2x}$$

La fonction $u(x)=xe^{2x}$ est une solution particulière de (E).

2. *Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'-2y=0$.*

L'équation différentielle $(E_0): y'=2y$ a pour solutions :

$$y(x)=ke^{2x}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

3. *Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).*

Si v est solution de (E), alors : $v'-2v=e^{2x} \iff v'=2v+e^{2x}$.

Or u est solution de (E), donc : $u'-2u=e^{2x} \iff u'=2u+e^{2x}$.

Ainsi : $v'-u'=\left(2v+e^{2x}\right)-\left(2u+e^{2x}\right)=2v-2u=2(v-u)$

Une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).

4. *En déduire toutes les solutions de l'équation (E).*

De ce qui précède, on obtient :

$$v(x)-u(x)=ke^{2x}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$
$$\iff v(x)=u(x)+ke^{2x}=xe^{2x}+ke^{2x}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

5. *Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.*

$$v(0)=1$$
$$\iff 0\times e^{2\times 0}+ke^{2\times 0}=1$$
$$\iff k=1$$

La solution cherchée est :

$$v(x)=xe^{2x}+e^{2x}=(x+1)e^{2x}$$

6. *Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{2x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) *Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.*

$$f'(x)=e^{2x}+(x+1)\times 2e^{2x}=(2x+3)e^{2x}$$

$\forall x\in\mathbb{R} : e^{2x}>0$

$$2x+3>0 \iff 2x>-3 \iff x>-\frac{3}{2}$$

Donc si $x>-\frac{3}{2}$: $f'(x)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante ;

si $x<-\frac{3}{2}$: $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante.

b) *Tracer C.*