Problèmes issus du site Chingatome que je remercie chaleureusement
https://chingmath.fr/chapitre/tle-spe/annales-equations-differentielles

Problème 1 :

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0;1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle :

   $$(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda \times y \quad \text{et la condition : } y(0) = 1.$$

   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

   On pose sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$: $z = \frac{1}{y}$.

   Ecrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. **Question de cours**

   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda \times y$ sont les fonctions :

   $$x \mapsto C \times e^{-\lambda x}$$

   où C est une constante réelle.

   a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle :

   $$(E'_\lambda) : z' = -(\lambda \times z + 1)$$

   telle que $z(0) = 1$.

   b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

3. a) Démontrer que : $\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

   On pourra étudier sur $]0;1]$ la fonction *f* définie par : $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$.

   b) En déduire que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

Problème 2 :

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A :

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -\frac{1}{20} y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :

   une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$, vérifie :

   $$f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\big(3 - \ln(f(t))\big) \quad \text{, pour tout } t \in [0;+\infty[$$

si et seulement si :

la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout $t\in[0;+\infty[$:

$$g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}.$$

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) : z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $t\in[0;+\infty[$:

$$f(t)=e^{3+C\times e^{\frac{t}{20}}}.$$

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t)=e^{3-3\times e^{\frac{t}{20}}}.$$

   a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

   c) Résoudre dans $[0;+\infty[$ l'inéquation $f(t)<0,02$.

   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus.

Partie B :

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants :

- la population testée comporte 50 % d'animaux malades ;
- si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ;
- si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas.

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{\mathrm{M}}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $p(\mathrm{M})$, $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$ et $p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})$.
2. En déduire $p(\mathrm{T})$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Problème 3 :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1. Démontrer que : $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.
2. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.

Le modèle utilisé pour décrire cette situation consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$$

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire : $g(0)=1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul et où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a : $u(t) > 0$.

On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Problème 4 :

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) : \begin{cases} f(-x) \times f'(x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases} \quad \text{pour tout nombre réel } x$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur par :

$$g(x) = f(-x) \times f(x).$$

a) Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c) En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d) On considère l'équation différentielle : $(E) : y' = \frac{1}{16} y$.

Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. **Question de cours**

a) On sait que la fonction : $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E).

Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto K\, e^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Problème 5 :

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :

$$(E') : 2y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \times (x+1).$$

a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times \left(mx^2 + px\right)$$

soit solution de (E') .

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation (E).

Résoudre l'équation (E') .

3. Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \times \left(x^2 + 2x\right).$$

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h .
5. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ .

b) Tracer les deux courbes sur un même graphique.

Problème 1 :

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0;1]$.

1. *On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle :*

$$(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda \times y \text{ et la condition : } y(0) = 1.$$

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

On pose sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$: $z = \frac{1}{y}$. Ecrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

$$z = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{z} \Leftrightarrow y' = \frac{-z'}{z^2}$$

Donc l'équation (E_λ) devient :

$$\frac{-z'}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \lambda \times \frac{1}{z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \lambda \times \frac{1}{z}$$
$$\Leftrightarrow -z' = 1 + \lambda \times z$$
$$\Leftrightarrow z' = -\lambda \times z - 1$$

2. ***Question de cours***

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda \times y$ sont les fonctions : $x \mapsto C \times e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle :

$$(E'_\lambda) : z' = -(\lambda \times z + 1)$$

telle que $z(0) = 1$.

Existence :

Soit f et g deux solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z' = -\lambda \times z - 1$. Ainsi :

$$f' = -\lambda \times f - 1 \text{ et } g' = -\lambda \times g - 1.$$

Ainsi : $f' - g' = (-\lambda \times f - 1) - (-\lambda \times g - 1) \Leftrightarrow (f-g)' = -\lambda(f-g)$

On note Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(x) = f(x) - g(x)$. On obtient :

$$\Phi'(x) = -\lambda \times \Phi(x).$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\Phi(x) = C \times e^{-\lambda x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Soit : $f(x) - g(x) = C \times e^{-\lambda x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + C \times e^{-\lambda x}$.

Solution particulière :

Une fonction constante peut être une solution particulière de l'équation différentielle :

$$h(x) = k, \ k \in \mathbb{R}, \text{ donc } h'(x) = 0.$$

Ainsi : $h'(x) = -\lambda \times h(x) - 1 \Leftrightarrow 0 = -\lambda \times k - 1 \Leftrightarrow k = -\frac{-1}{-\lambda} = -\frac{1}{\lambda}$.

Soit : $h(x) = -\frac{1}{\lambda}$.

Conclusion

A partir de cette solution particulière $h(x) = -\frac{1}{\lambda}$ et de la relation :

$$f(x) = g(x) + C \times e^{-\lambda x},\ C \in \mathbb{R}.$$

On déduit l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$:

$$f(x) = C \times e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda},\ C \in \mathbb{R}.$$

b) *Donner l'expression de cette fonction que l'on notera* z_0.

La relation $z(0) = 1$ implique :

$$C \times e^{-\lambda \times 0} - \frac{1}{\lambda} = 1 \iff C = 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$$

La solution cherchée est :

$$z_0(x) = \frac{\lambda + 1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}.$$

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 *ne s'annule pas sur l'intervalle* $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$.

3. a) *Démontrer que :* $\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$.

On pourra étudier sur $]0;1]$ *la fonction f définie par :* $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$.

$$\forall x \in]0;1] :\ f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Donc $\forall x \in]0;1] :\ f'(x) > 0$ et la fonction *f* est strictement croissante avec :

$$f(0) = \ln(1+0) - \frac{0}{0+1} = 0$$

Donc $\forall x \in]0;1] :\ f(x) > 0 \iff \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0 \iff \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$

$$\lambda \in]0;1] \text{ donc : } \ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

b) *En déduire que* (E_λ) *admet une solution strictement positive sur* $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ *que l'on précisera.*

Nous avons précédemment obtenu :

$$z_0(x) = \frac{\lambda + 1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$$

Ainsi :

$$z_0(x) < 0 \iff \frac{\lambda+1}{\lambda} e^{-\lambda x} < \frac{1}{\lambda} \iff e^{-\lambda x} < \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda}{\lambda+1} \iff e^{-\lambda x} < \frac{1}{\lambda+1}$$

$$\iff -\lambda x < \ln\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \iff -\lambda x < -\ln(\lambda+1) \iff \lambda x > \ln(\lambda+1) \iff x > \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda+1)$$

$\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$, donc :

$$z_0(x) < 0 \iff x > \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda+1) > \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda}{\lambda+1} \iff x > \frac{1}{\lambda+1}$$

Or : $\quad 0 < \lambda \le 1$

$\Leftrightarrow \ 1 < \lambda + 1 \leq 2$

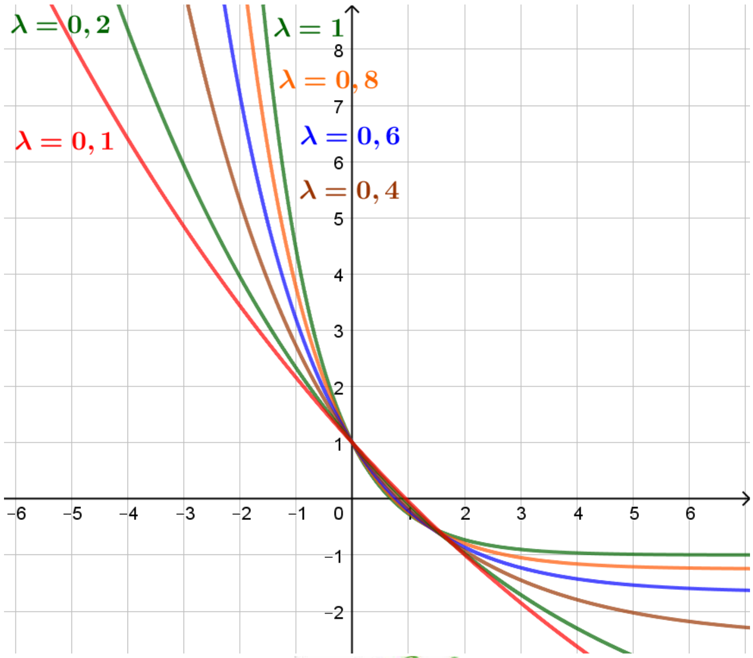
$\Leftrightarrow \ 1 > \dfrac{1}{\lambda+1} \geq \dfrac{1}{2}$

Et la relation $x > \dfrac{1}{\lambda+1}$ implique : $x \geq \dfrac{1}{2}$.

La fonction z_0 ne peut prendre de valeur négative sur l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ et (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$.

Pour $\lambda = 1$, on obtient :

$$z_0(x) = 2e^{-x} - 1$$



Problème 2 :

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A :

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : $\quad (E) : y' = -\dfrac{1}{20} y(3 - \ln y)$.

1. *Démontrer l'équivalence suivante :*

une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$, vérifie :

$$f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left(3 - \ln\left(f(t)\right)\right) \text{ , pour tout } t \in [0;+\infty[$$

si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout $t \in [0;+\infty[$: $g'(t) = \dfrac{1}{20} g(t) - \dfrac{3}{20}$.

Si $f'(t) = -\dfrac{1}{20} f(t)\left(3 - \ln\left(f(t)\right)\right)$ avec f strictement positive sur $[0;+\infty[$, alors :

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=-\frac{1}{20}\ln\left(f(t)\right)+\frac{3}{20}$$

→en reconnaissant $g'(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}$, on obtient : $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$.

Si $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$, alors :

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{1}{20}\ln\left(f(t)\right)-\frac{3}{20} \Leftrightarrow f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left(3-\ln\left(f(t)\right)\right)$$

2. *Donner la solution générale de l'équation différentielle :* $(H): z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}$.

L'équation homogène est : $z'=\frac{1}{20}z$, sa solution est :

$$u(t)=k\times e^{\frac{t}{20}} \text{ , } k\in\mathbb{R}$$

Une solution particulière de l'équation $(H): z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}$ est une fonction constante $v(t)=m$, $m\in\mathbb{R}$, avec $v'(t)=0$, soit :

$$0=\frac{1}{20}\times m-\frac{3}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{20}m=\frac{3}{20} \Leftrightarrow m=\frac{3}{20}\times 20=3$$ →soit $v(t)=3$.

La solution générale est :

$$g(t)=u(t)+v(t)=k\times e^{\frac{t}{20}}+3 \text{ , } k\in\mathbb{R}.$$

3. *En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout* $t\in[0;+\infty[$: $f(t)=e^{3+C\times e^{\frac{t}{20}}}$.

La relation $g(t)=\ln\left(f(t)\right)$ équivaut à :

$$f(t)=e^{g(t)}=e^{ke^{\frac{t}{20}}+3} \text{ , } k\in\mathbb{R}.$$

4. *La condition initiale conduit donc à considérer la fonction* f *définie par :* $f(t)=e^{3-3\times e^{\frac{t}{20}}}$.

a) *Déterminer la limite de la fonction* f *en* $+\infty$.

On pose $\mathrm{T}=\frac{t}{20}$, ainsi : $\lim\limits_{t\to+\infty} 3-3\times e^{\frac{t}{20}}=\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} 3-3\times e^{\mathrm{T}}=-\infty$

On pose $\mathrm{U}=3-3\times e^{\mathrm{T}}$: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=e^{3-3\times e^{\frac{t}{20}}}=\lim\limits_{\mathrm{U}\to-\infty} e^{\mathrm{U}}=0$.

b) *Déterminer le sens de variation de la fonction* f *sur* $[0;+\infty[$.

La fonction f est dérivable en tant qu'exponentielle de composée de fonctions polynomiales et exponentielle. Pour tout réel *x* :

$$f'(t)=-3\times\frac{1}{20}e^{\frac{t}{20}}e^{3-3\times e^{\frac{t}{20}}}=\frac{3}{20}e^{3-2\times e^{\frac{t}{20}}}$$

La dérivée étant strictement positive, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) *Résoudre dans* $[0;+\infty[$ *l'inéquation* $f(t)<0{,}02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus.

$$
\begin{aligned}
f(t) < 0,02 \iff & e^{3-3\times e^{\frac{t}{20}}} < 0,02 \\
\iff & 3-3\times e^{\frac{t}{20}} < \ln 0,02 \\
\iff & -3\times e^{\frac{t}{20}} < \ln 0,02 - 3 \\
\iff & e^{\frac{t}{20}} > \frac{-\ln 0,02+3}{3} \\
\iff & \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{3-\ln 0,02}{3}\right) \\
\iff & t > 20\ln\left(\frac{3-\ln 0,02}{3}\right) \\
\iff & t > 16,693
\end{aligned}
$$

Le temps t est exprimé en années à partir de l'origine 2000, la fonction f donne le nombre de milliers d'individus.

Si la taille de l'échantillon devient inférieure à vingt individus, alors $f(t) < 0,02$.

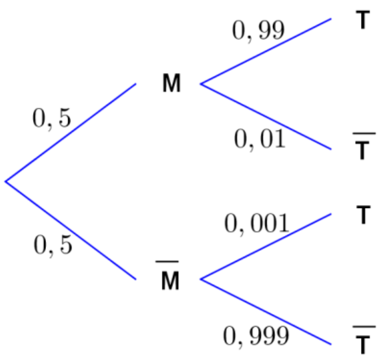
On a obtenu un temps $t > 16,693$, donc à partir de la 17ème année.

Partie B :

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants :

- *la population testée comporte 50 % d'animaux malades ;*
- *si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ;*
- *si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas.*

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{\text{M}}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».



1. *Déterminer $p(\text{M})$, $p_{\text{M}}(\text{T})$ et $p_{\overline{\text{M}}}(\text{T})$.*

$p(\text{M}) = 0,5$, $p_{\text{M}}(\text{T}) = 0,99$, $p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 0,001$.

2. *En déduire $p(\text{T})$.*

M et $\overline{\text{M}}$ forment une partition. D'après la loi des probabilités totales

$$
\begin{aligned}
p(\text{T}) &= p(\text{M}\cap\text{T}) + p\left(\overline{\text{M}}\cap\text{T}\right) \\
&= p(\text{M})\times p_{\text{M}}(\text{T}) + p\left(\overline{\text{M}}\right)\times p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) \\
&= 0,5\times 0,99 + 0,5\times 0,001 = 0,4955
\end{aligned}
$$

3. *Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?*

$$p_{\text{T}}(\text{M}) = \frac{p(\text{M}\cap\text{T})}{p(\text{T})} = \frac{0,5\times 0,99}{0,4955} \simeq 0,999 .$$

Si les données de l'énoncé sont fiables, ce test est valable.

Problème 3 :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1. *Démontrer que :* $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

$$f(x)=\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}=\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{\left(2e^{-\frac{x}{4}}+1\right)e^{\frac{x}{4}}}=\frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1}$$

2. *Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

On pose $\mathrm{X}=-\dfrac{x}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}}=\lim_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}}=0 \text{ donc par somme et quotient : } \lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{4}}=\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} e^{\mathrm{X}}=+\infty \text{ donc par somme et quotient : } \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

3. *Etudier les variations de la fonction f.*

$$f'(x)=\frac{\frac{3}{4}e^{\frac{x}{4}}\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)-3e^{\frac{x}{4}}\times\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{\frac{3}{4}e^{\frac{x}{4}}\left(2+e^{\frac{x}{4}}-e^{\frac{x}{4}}\right)}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{x}{4}}}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}$$

La dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. *On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette situation consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) : $y'=\dfrac{y}{4}$.*

   a) *Résoudre l'équation différentielle (E_1).*

   La solution de l'équation différentielle (E_1) est :

$$g(t)=k\times e^{\frac{t}{4}},\ k\in\mathbb{R}$$

   b) *Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire : $g(0)=1$.*

   En utilisant la condition initiale :

$$g(0)=1 \iff k\times e^{\frac{0}{4}}=1 \iff k=1$$

   Donc $g(t)=e^{\frac{t}{4}}$

c) *Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?*

$$g(t)>3 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{4}}>3 \Leftrightarrow \frac{t}{4}>\ln 3 \Leftrightarrow t>4\ln 3 \simeq 4{,}39$$

La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois dans cinq ans.

2. *En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :*

$$(E_2):\begin{cases} u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0)=1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul et où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) *On suppose que, pour tout réel positif t, on a : $u(t)>0$.*

On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3):\begin{cases} h'(t)=-\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul.

Si u satisfait aux conditions (E_2), avec $h=\dfrac{1}{u} \Leftrightarrow u=\dfrac{1}{h}$, d'où : $u'=\dfrac{-h'}{h^2}$, on a :

$$\begin{cases} u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-h'(t)}{h^2(t)}=\dfrac{\frac{1}{h(t)}}{4}-\dfrac{\left[\frac{1}{h(t)}\right]^2}{12} \\ \dfrac{1}{h(0)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -h'(t)=h^2(t)\left(\dfrac{1}{4h(t)}-\dfrac{1}{12h^2(t)}\right) \\ \dfrac{1}{h(0)}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h'(t)=-\dfrac{h(t)}{4}+\dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$$: la fonction h satisfait aux conditions (E_3).

Si h satisfait aux conditions (E_3), avec $h=\dfrac{1}{u}$, d'où : $h'=\dfrac{-u'}{u^2}$, on a :

$$\begin{cases} h'(t)=-\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-u'(t)}{u^2(t)}=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{u(t)}+\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{u(0)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -u'(t)=-\dfrac{1}{4}\times u(t)+\dfrac{u^2(t)}{12} \\ u(0)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t)=\dfrac{1}{4}\times u(t)-\dfrac{u^2(t)}{12} \\ u(0)=1 \end{cases}$$: la fonction u satisfait aux conditions (E_2).

b) *Donner les solutions de l'équation différentielle :* $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ *et en déduire l'expression de la fonction* h*, puis celle de la fonction* u*.*

Les solutions de cette équation différentielle sont :

$$y = ke^{-\frac{t}{4}} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = ke^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}\text{ , } k \in \mathbb{R}\text{ .}$$

Avec la condition initiale $h(0)=1$, on obtient :

$$h(0)=1 \Leftrightarrow ke^{-\frac{0}{4}} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

Ainsi : $h(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$.

On en déduit :

$$u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{t}{4}} + 1}$$

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

On pose $\mathrm{T} = -\frac{t}{4}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{4}} = \lim\limits_{\mathrm{T}\to-\infty} e^{\mathrm{T}} = 0$ donc par somme et quotient : $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 3$.

La population devrait à long terme se stabiliser à 300 rongeurs.

Problème 4 :

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant la condition :*

$$(C) : \begin{cases} f(-x) \times f'(x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases} \quad \text{pour tout nombre réel } x$$

(où f' *désigne la fonction dérivée de la fonction* f *) et de trouver cette fonction.*

1. *On suppose qu'il existe une fonction* f *satisfaisant la condition* (C) *et on considère alors la fonction* g *définie sur par :* $g(x) = f(-x) \times f(x)$.

a) *Démontrer que la fonction* f *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.

La relation $f(-x) \times f'(x) = 1$ est vraie pour tout réel x. Elle implique que $f(-x)$ soit toujours non nul.

b) *Calculer la fonction dérivée de la fonction* g.

$$g'(x) = -f'(-x) \times f(x) + f(-x) \times f'(x)$$

Or $f(-x) \times f'(x) = 1$ pour tout réel x, ainsi :

$$g'(x) = -1 + 1 = 0$$

c) *En déduire que la fonction* g *est constante et déterminer sa valeur.*

Sa dérivée étant nulle, la fonction g est constante.

$$g(0) = f(-0) \times f(0) = (-4) \times (-4) = 16$$

d) *On considère l'équation différentielle :* $(E) : y' = \frac{1}{16}y$ *.*

Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0)=-4$.

La solution générale de l'équation différentielle (E) est :

$$f(t)=k\times e^{\frac{t}{16}}\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

En intégrant la condition initiale :

$$f(0)=-4 \iff k\times e^{\frac{0}{16}}=-4 \iff k=-4$$

Ainsi : $f(t)=-4e^{\frac{t}{16}}$.

2. Question de cours

a) On sait que la fonction : $x\mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E).

Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x\mapsto K\,e^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Problème 5 :

1. *Résoudre l'équation différentielle $(E): 2y'+y=0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

$$2y'+y=0 \iff y'=-\frac{1}{2}y.$$

La solution générale de l'équation différentielle (E) est :

$$y(x)=k\times e^{-\frac{x}{2}}\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

2. *On considère l'équation différentielle : $(E'): 2y'+y=e^{-\frac{x}{2}}\times(x+1)$.*

a) *Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\times\left(mx^2+px\right)$$

soit solution de (E').

$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\times\left(mx^2+px\right)+e^{-\frac{x}{2}}\times(2mx+p)=e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}mx^2-\frac{1}{2}px+2mx+p\right)$$

Si la fonction f est solution de (E'), alors :

$$2f'(x)+f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\times(x+1)$$

$$\iff 2e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}mx^2-\frac{1}{2}px+2mx+p\right)+e^{-\frac{x}{2}}\times\left(mx^2+px\right)=e^{-\frac{x}{2}}\times(x+1)$$

$$\iff -mx^2-px+4mx+2p+mx^2+px=x+1$$

$$\iff 4mx+2p=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{4} \\ p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right)$

b) *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Montrer que g est solution de l'équation (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation (E). Résoudre l'équation (E').

Si g est solution de l'équation (E') : $2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times (x+1)$.

Or f est solution de l'équation (E') : $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times (x+1)$.

En soustrayant ces deux équations membre à membre, on obtient :

$$2\big(g'(x) - f'(x)\big) + \big(g(x) - f(x)\big) = 0$$

→la fonction $g - f$ est solution de l'équation (E).

Si $g - f$ est solution de l'équation (E) : $2\big(g'(x) - f'(x)\big) + \big(g(x) - f(x)\big) = 0$.

$$2\big(g'(x) - f'(x)\big) + \big(f'(x) - f(x)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) - \left[2f'(x) + f(x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times (x+1)$$

→ g est solution de l'équation (E')

$g - f$ étant solution de l'équation (E), on a :

$$g(x) - f(x) = k \times e^{-\frac{x}{2}}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = f(x) + k \times e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + k \times e^{-\frac{x}{2}}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

3. *Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$h(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \times \left(x^2 + 2x\right).$$

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.

b) Tracer les deux courbes sur un même graphique.