Exercices à prise d'initiative sur les fonctions et équations différentielles

Exercice 1 :

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ telles que :

$$2f(x)+f(-x)=3x^2+5x+3$$

Exercice 2 :

Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'-5y=e^{-4x}+7x$$

Exercice 3 :

Trouver les solutions ne s'annulant pas de l'équation différentielle : $(E) : y'+2y-(x+1)\sqrt{y}=0$.

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y'+2xy=0$.

Exercice 5 :

Résoudre l'équation différentielle : $(E) : xy'-y^2=0$.

Exercice 6 :

Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y'^2+2yy'+y^2=0$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ telles que :

$$2f(x)+f(-x)=3x^2+5x+3$$

Le principe est de réduire cette équation en remplaçant x par $-x$:

$$2f(-x)+f(-(-x))=3(-x)^2+5(-x)+3$$

$$\Leftrightarrow\ 2f(-x)+f(x)=3x^2-5x+3$$

On obtient un système fonctionnel :

$$\begin{cases}2f(x)+f(-x)=3x^2+5x+3 & \times 2\\ f(x)+2f(-x)=3x^2-5x+3 & \times 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4f(x)+2f(-x)=6x^2+10x+6 & L_1\\ f(x)+2f(-x)=3x^2-5x+3 & L_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l}L_1-L_2\\ L_2\end{array}\begin{cases}3f(x)=\left(6x^2+10x+6\right)-\left(3x^2-5x+3\right)\\ f(x)+2f(-x)=3x^2-5x+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3f(x)=3x^2+15x+3\\ f(x)+2f(-x)=3x^2-5x+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ f(x)=\frac{3x^2+15x+3}{3}=x^2+5x+1$$

Exercice 2 :

Trouver une solution particulière de l'équation différentielle : $y'-5y=e^{-4x}+7x$

On cherche d'abord une solution particulière que l'on note y_1 de :

$$y'-5y=e^{-4x}$$

On pose $y=ke^{-4x}$ donc $y'=-4ke^{-4x}$. Ainsi :

$$-4ke^{-4x}-5\times ke^{-4x}=e^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow\ -9ke^{-4x}=e^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow\ k=-\frac{1}{9}$$

On obtient : $y_1=-\frac{1}{9}e^{-4x}$

On cherche ensuite une solution particulière que l'on note y_2 de :

$$y'-5y=7x$$

On pose $y=ax+b$ donc $y'=a$. Ainsi :

$$a-5(ax+b)=7x$$

$$\Leftrightarrow\ a-5ax-5b=7x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-5a=7\\ a-5b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{7}{5}\\ b=\frac{1}{5}a=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{7}{5}\right)=-\frac{7}{25}\end{cases}$$

On obtient : $y_2=-\frac{7}{5}x-\frac{7}{25}$

Une solution particulière de l'équation totale est alors $y_1 + y_2$:

$$y_P = -\frac{1}{9}e^{-4x} - \frac{7}{5}x - \frac{7}{25}$$

Exercice 3 :

Trouver les solutions ne s'annulant pas de l'équation différentielle : $(E): y'+2y-(x+1)\sqrt{y}=0$.

Cette équation n'est pas linéaire à cause du $\sqrt{y}$.

On pose alors la fonction :

$$z(x)=\sqrt{y(x)}$$

z est bien définie et dérivable car y est non nulle par hypothèse. Sa dérivée est :

$$z'(x)=\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$$

On cherche alors une équation linéaire vérifiée par z.

On peut par exemple tout diviser dans (E) par $\sqrt{y(x)}$ (car y est non nulle par hypothèse) :

$$\frac{y'}{\sqrt{y}}+2\times\frac{y}{\sqrt{y}}-(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}}+2\sqrt{y}-(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2z'+2z-(x+1)=0 : (E')$$

En fait, en raisonnant par équivalence, on montre que y est solution de l'équation de (E) si et seulement si z est solution de (E'), ce qui permet de dire que résoudre (E) revient à résoudre (E').

L'équation homogène $2z'+2z=0 \Leftrightarrow z'=-z$ a pour solution :

$$z_1=ke^{-x},\ k\in\mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation $(E'): 2z'+2z-(x+1)=0 \Leftrightarrow 2z'+2z=x+1$, on pose :

$z_2(x)=ax+b$, a et b étant deux réels. On obtient : $z_2'(x)=a$.

Ainsi : $2a+2(ax+b)=x+1$

$$\Leftrightarrow 2ax+2a+2b=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=1\\2a+2b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

D'où : $z_2(x)=\frac{1}{2}x$

La solution générale de l'équation différentielle : $(E): y'+2y-(x+1)\sqrt{y}=0$ est :

$$z(x)=ke^{-x}+\frac{1}{2}x,\ k\in\mathbb{R}$$

Or $y(x)=z^2(x)$, soit :

$$y(x)=\left(ke^{-x}+\frac{1}{2}x\right)^2,\ k\in\mathbb{R}$$

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y'+2xy=0$.

Cette équation se réécrit :

$$(E) : y'=-2xy$$

Si on suppose y non nulle :

$$\frac{y'}{y}=-2x$$

On peut intégrer cette équation :

$$\ln(|y|)=-x^2+C \text{ , } C\in\mathbb{R}$$

Soit : $|y|=e^{-x^2+C}$, $C\in\mathbb{R}$.

Si on suppose que la fonction y est strictement positive :

$$y=e^C\times e^{-x^2} \text{ , } C\in\mathbb{R}.$$

En posant $k=e^C$:

$$y=ke^{-x^2} \text{ , } k\in\mathbb{R}.$$

Exercice 5 :

Résoudre l'équation différentielle : $(E) : xy'-y^2=0$.

On peut réécrire cette équation :

$$xy'=y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y^2}=\frac{1}{x}$$

On peut intégrer cette équation :

$$\frac{-1}{y}=\ln(|x|)+C \text{ , } C\in\mathbb{R}$$

D'où : $y=\dfrac{-1}{\ln(|x|)+C}$, $C\in\mathbb{R}$

Exercice 6 :

Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y'^2+2yy'+y^2=0$.

Si on suppose y non nulle, on peut réécrire cette équation :

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2+2\times\frac{y'}{y}+1=0$$

On pose : $z=\dfrac{y'}{y}$. L'équation devient :

$$z^2+2z+1=0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^2=0$$

L'unique solution réelle est : $z=-1$. On en déduit :

$$\frac{y'}{y}=-1 \Leftrightarrow y'=-y.$$

Les solutions sont de la forme : $y=ke^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.