Contrôle sur les primitives et équations différentielles (1h15)

L'équation différentielle est une façon de regarder. Saint Exupéry

Exercice 1 :

Le modèle de Verhulst est basé sur l'hypothèse que la vitesse d'accroissement est proportionnelle, d'une part à la population $g(t)$, et d'autre part à la capacité d'accueil encore disponible $\mathrm{M}-g(t)$ où M est une constante représentant l'effectif maximal qui peut apparaitre au sein de cette population.

La population de départ est de 10 lapins. L'ile ne peut contenir plus de 1 000 lapins, la fonction g (en milliers de lapins) vérifie alors l'équation logistique $(E) : y' = by(1-y)$, où $b = 0,05$.

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montrer que l'équation (E) équivaut $(E') : z' + bz = b$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E') et montrer que $g(t) = \dfrac{1}{1+99e^{-0,05t}}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$.
4. Etudier la limite de g à long terme.

Exercice 2 :

1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) On considère l'équation différentielle
$$(E') : 2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1).$$
   a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right)$$
   soit une solution de (E').
   b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).
   Résoudre l'équation (E').
3) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right).$$
4) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de h.

Exercice 3 :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1. Démontrer que : $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.
2. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps *t*, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction *g* de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle *t* désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour *g*(*t*) est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour *g* une solution, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps *t* (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction *u*, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0)=1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel *t* positif ou nul et où u' désigne la fonction dérivée de la fonction *u*.

a. On suppose que, pour tout réel positif *t*, on a $u(t)>0$.

On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction *h* définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction *u* satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction *h* satisfait aux conditions

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel *t* positif ou nul.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

et en déduire l'expression de la fonction *h*, puis celle de la fonction *u*.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque *t* tend vers $+\infty$?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Le modèle de Verhulst est basé sur l'hypothèse que la vitesse d'accroissement est proportionnelle, d'une part à la population $g(t)$, et d'autre part à la capacité d'accueil encore disponible $\mathrm{M}-g(t)$ où M est une constante représentant l'effectif maximal qui peut apparaitre au sein de cette population.
La population de départ est de 10 lapins. L'ile ne peut contenir plus de 1 000 lapins, la fonction g (en milliers de lapins) vérifie alors l'équation logistique $(E): y'=by(1-y)$, où $b=0,05$.

1. *On pose $z=\dfrac{1}{y}$. Montrer que l'équation (E) équivaut (E') : $z'+bz=b$.*

La relation $z=\dfrac{1}{y}$ donne par dérivation :

$$z'=\frac{-y'}{y^2}=\frac{-by(1-y)}{y^2}=\frac{-b(1-y)}{y}=-b\times\frac{1}{y}+b=-b\times z+b$$

$$z'=-bz+b \quad\Leftrightarrow\quad z'+bz=b \quad \rightarrow \text{ ainsi } (E)\Rightarrow(E')$$

Dans l'autre sens, en partant de (E') :

$$\begin{aligned}
& z'+bz=b\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-y'}{y^2}+b\times\frac{1}{y}=b\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-y'}{y^2}=b-b\times\frac{1}{y}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-y'}{y^2}\times y^2=\left(b-b\times\frac{1}{y}\right)\times y^2\\
\Leftrightarrow\ & -y'=by^2-by\\
\Leftrightarrow\ & -y'\times(-1)=\left(by^2-by\right)\times(-1)\\
\Leftrightarrow\ & y'=-by^2+by\\
\Leftrightarrow\ & y'=by(-y+1) \quad \rightarrow \text{ ainsi } (E')\Rightarrow(E)
\end{aligned}$$

Ainsi $(E')\Leftrightarrow(E)$

2. *Résoudre l'équation différentielle (E') et montrer que $g(t)=\dfrac{1}{1+99e^{-0,05t}}$.*

L'ensemble des solutions de l'équation (E') : $z'=-bz+b$ est :

$$z(t)=ke^{-bt}-\frac{b}{-b}=ke^{-bt}+1,\ k\in\mathbb{R}.$$

Or $b=0,05$ donc : $z(t)=ke^{-0,05t}+1$, $k\in\mathbb{R}$

La population de départ est de 10 lapins donc $g(0)=0,01$ et $z(0)=\dfrac{1}{g(0)}=\dfrac{1}{0,01}=100$.

On obtient :

$$z(0)=ke^{-0,05\times0}+1=100 \quad\Leftrightarrow\quad k=100-1=99$$

Ainsi : $\quad z(t)=1+99e^{-0,05t}$.

On en déduit :

$$g(t)=\frac{1}{z(t)}=\frac{1}{1+99e^{-0,05t}}$$

3. *Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$.*

$$g'(t)=\frac{-99\times(-0,05)e^{-0,05t}}{\left(1+99e^{-0,05t}\right)^2}=\frac{4,95e^{-0,05t}}{\left(1+99e^{-0,05t}\right)^2}.$$

La dérivée étant strictement positive, la fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Exercice 2 :

1) *Résoudre l'équation différentielle $(E):2y'+y=0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

L'équation différentielle (E) s'écrit :

$$2y'=-y \Leftrightarrow y'=-\frac{1}{2}y.$$

L'ensemble des solutions est :

$$y(x)=ke^{-\frac{1}{2}x},\ k\in\mathbb{R}.$$

2) *On considère l'équation différentielle $(E'):2y'+y=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$.*

a) *Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2+px\right)$ soit une solution de (E').*

La fonction f est dérivable en tant que produit de fonction exponentielle et polynomiale :

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2+px\right)+2e^{-\frac{x}{2}}(2mx+p)\\&=-e^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2+px\right)+2e^{-\frac{x}{2}}(2mx+p)\\&=e^{-\frac{x}{2}}\left[-\left(mx^2+px\right)+2(2mx+p)\right]\\&=e^{-\frac{x}{2}}\left[-mx^2-px+4mx+2p\right]\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}2\times f'(x)+f(x)&=2\times e^{-\frac{x}{2}}\left(-mx^2-px+4mx+2p\right)+2e^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2+px\right)\\&=e^{-\frac{x}{2}}\left(-2mx^2-2px+8mx+4p+2mx^2+2px\right)\\&=e^{-\frac{x}{2}}(8mx+4p)\end{aligned}$$

Si la fonction f est une solution de (E'), on doit avoir :

$$e^{-\frac{x}{2}}(8mx+4p)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (8mx+4p)=(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8m=1\\4p=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{8}\\[2mm] p=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Ainsi

$$f(x)=2e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right)=e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)$$

b) *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g-f$ est solution de (E). Résoudre l'équation (E').*

Si g est solution de (E') :

$$2g'(x)+g(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}2\left(g'(x)-f'(x)\right)+\left(g(x)-f(x)\right)&=2g'(x)-2f'(x)+g(x)-f(x)\\&=2g'(x)+g(x)-\left(2f'(x)+f(x)\right)\\&=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)-e^{-\frac{x}{2}}(x+1)\\&=0\end{aligned}$$

Soit $g-f$ est solution de (E).

Réciproquement si $g-f$ est solution de (E) :

$$\begin{aligned}&2\left(g'(x)-f'(x)\right)+\left(g(x)-f(x)\right)=0\\\Leftrightarrow\ &2g'(x)+g(x)-2f'(x)-f(x)=0\\\Leftrightarrow\ &2g'(x)+g(x)=2f'(x)+f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)\end{aligned}$$

Alors g est solution de (E').

Ainsi $g-f$ est solution de (E), soit :

$$\begin{aligned}&g(x)-f(x)=ke^{-\frac{1}{2}x}\ ,\ k\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow\ &g(x)=f(x)+ke^{-\frac{1}{2}x}\ ,\ k\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow\ &g(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)+ke^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x+4k\right),\ k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

3) *Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)$*

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)+\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(2x+2)\\&=-\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x+1)\\&=\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}\left[-\left(x^2+2x\right)+4(x+1)\right]\\&=\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}\left(-x^2+2x+4x+4\right)\\&=\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}\left(-x^2+6x+4\right)\end{aligned}$$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$: $\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}>0$.

$\Delta=6^2-4\times(-1)\times4=36+16=52$ donc deux racines

$x_1=\frac{-6-\sqrt{52}}{2\times(-1)}=3+\sqrt{13}$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{52}}{2\times(-1)}=3-\sqrt{13}$

$a=-1$ donc la parabole est « orientée vers le bas »

Si $x\in\left]3-\sqrt{13};3+\sqrt{13}\right[$: $h'(x)>0$ et la fonction h est croissante

Si $x \in \left]-\infty;3-\sqrt{13}\right[\cup \left]3+\sqrt{13};+\infty\right[$: $h'(x)<0$ et la fonction h est décroissante

4) *Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de h avec $h(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)$*

On pose : $\mathrm{X}=-\frac{x}{2}$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} e^{\mathrm{X}}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+2)=+\infty$

ainsi par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)=+\infty$

$$\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\times\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}\times\left(x^2+2x\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{2}}\times\frac{x^2+2x}{\frac{x^2}{4}}=\left(-\frac{x}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{2}}\times\frac{x^2+2x}{x^2}$$

$$=\left(-\frac{x}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{2}}\times\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

On pose : $\mathrm{X}=-\frac{x}{2}$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{X}^2e^{\mathrm{X}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$.

Ainsi par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right)=0$

Exercice 3 :
Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1. *Démontrer que : $f(x)=\frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.*

$$f(x)=\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}=\frac{3}{e^{-\frac{x}{4}}\times\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)}=\frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1}$$

2. *Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

On pose : $\mathrm{X}=-\frac{x}{4}$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{4}}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} e^{\mathrm{X}}=+\infty$.

Par somme et par quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}=3 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}=0$$

3. *Etudier les variations de la fonction f.*

La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions polynomiales et exponentielle :

On pose $u(x)=1+2e^{-\frac{x}{4}}$ d'où : $u'(x)=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{x}{4}}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}$

Ainsi : $$f'(x)=\frac{3\times(-1)\times\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}$$

Numérateur et dénominateur étant strictement positifs, $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante.

Partie B

1. *On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour g(t) est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle : $(E_1): y'=\frac{y}{4}$*

a. *Résoudre l'équation différentielle (E_1).*

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y=ke^{\frac{t}{4}},k\in\mathbb{R}$$

b. *Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.*

La fonction g est la solution de l'équation (E_1) vérifiant $g(0)=1$, soit :

$$ke^{\frac{0}{4}}=1 \Leftrightarrow k=1$$

Ainsi : $g(t)=e^{\frac{t}{4}}$

c. *Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?*

$$\begin{aligned}&g(t)>3\\ \Leftrightarrow\ &e^{\frac{t}{4}}>3\\ \Leftrightarrow\ &\frac{t}{4}>\ln 3\\ \Leftrightarrow\ &t>4\ln 3\end{aligned}$$

LA fonction g étant croissante, la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois à partir de la cinquième année.

2. *En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :*

$$(E_2):\begin{cases}u'(t)=\frac{u(t)}{4}-\frac{[u(t)]^2}{12}\\ u(0)=1\end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul et où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. *On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)>0$.*

On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, *la fonction h définie par* $h=\frac{1}{u}$. *Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions* (E_2) *si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions*

$$(E_3):\begin{cases} h'(t)=-\frac{1}{4}h(t)+\frac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul.

Si $h=\frac{1}{u}$, alors :

$$h'(t)=\frac{-u'(t)}{u^2(t)}=\frac{-\left(\frac{u(t)}{4}-\frac{u^2(t)}{12}\right)}{u^2(t)}=-\frac{1}{4u(t)}+\frac{1}{12}=-\frac{1}{4}\times h(t)+\frac{1}{12}$$

avec $h(0)=\frac{1}{u(0)}=\frac{1}{1}=1$

b. *Donner les solutions de l'équation différentielle :* $y'=-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}$ *et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.*

Les solutions sont de la forme :

$$y=ke^{-\frac{t}{4}}-\frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}}=ke^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{12}\times 4=ke^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3},k\in\mathbb{R}$$

La valeur $h(0)=1$ donne :

$$ke^{-\frac{0}{4}}+\frac{1}{3}=1 \iff k=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Ainsi $h(t)=\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3}$

et : $g(t)=\frac{1}{h(t)}=\frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3}}$

c. *Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers* $+\infty$ *?*

On pose : $\mathrm{T}=\frac{t}{4}$, ainsi : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{4}}=\lim\limits_{\mathrm{T}\to-\infty} e^{\mathrm{T}}=0$

Ainsi par produit, somme et quotient :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

La population va se stabiliser à 300 rongeurs.