Calcul d'intégrales plus techniques

Exercice 1C.1

Calculer $\int_0^1 \sqrt{7x+9}\,dx$.

Exercice 1C.2

Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(x)-1}{x^2}\,dx$.

Exercice 1C.1

Calculer $\int_0^1 \sqrt{7x+9}dx$.

$$\int_0^1 \sqrt{7x+9}dx = \int_0^1 (7x+9)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{7}\times\int_0^1 7(7x+9)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{7}\times\left[\frac{2}{3}(7x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{21}(7\times1+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{21}(7\times0+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{21}\left(16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{21}\left(16\times16^{\frac{1}{2}} - 9\times9^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{21}(16\times4-9\times3) = \frac{2}{21}\times37 = \frac{74}{21}$$

Exercice 1C.2

Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(x)-1}{x^2}dx$.

Aucune méthode ne s'applique ici, ni les intégrations par partie à venir en fin de chapitre.

En étant observateur, cela pourrait être une dérivée de la forme $\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

→dans ce cas, on doit avoir : $v=x$ ou $v=-x$.

Si $v=x$ alors $v'=1$, d'où :

$$\frac{\ln(x)-1}{x^2} = \frac{u'\times x - u\times1}{x^2}$$

→on devrait alors avoir $u=-\ln x$ et $u'=-\frac{1}{x}$

Vérification :

$$\frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{-\frac{1}{x}\times x-(-\ln x)\times1}{x^2} = \frac{-1+\ln x}{x^2}$$

Ainsi : $\int_1^2 \frac{\ln(x)-1}{x^2}dx = \left[\frac{u}{v}\right]_1^2 = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^2 = \frac{-\ln 2}{2}+\frac{\ln 1}{1} = -\frac{\ln 2}{2}$