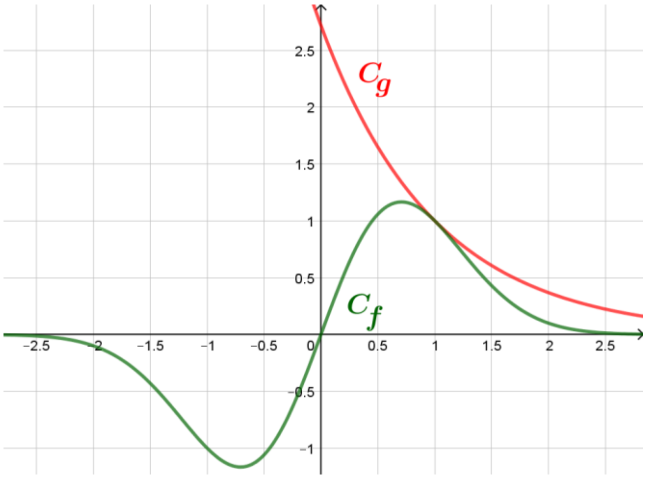
Aires et intégrales

Exercice 2B.1 :

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions *f* et *g*.



1) Trouver une primitive *F* et *G* des fonctions *f* et *g* sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)dx$.
3) Interpréter graphiquement ce résultat.

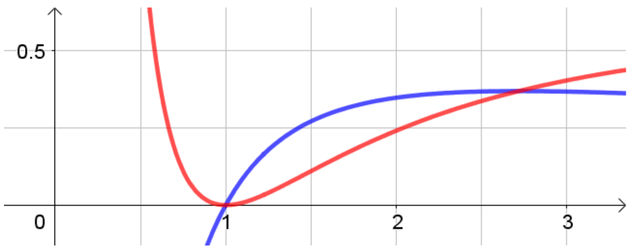
Exercice 2B.2 :

On considère deux fonctions *f* et *g* définies respectivement sur $\left]0;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

On note C_f et C_g les courbe respectives des fonction f et *g*.

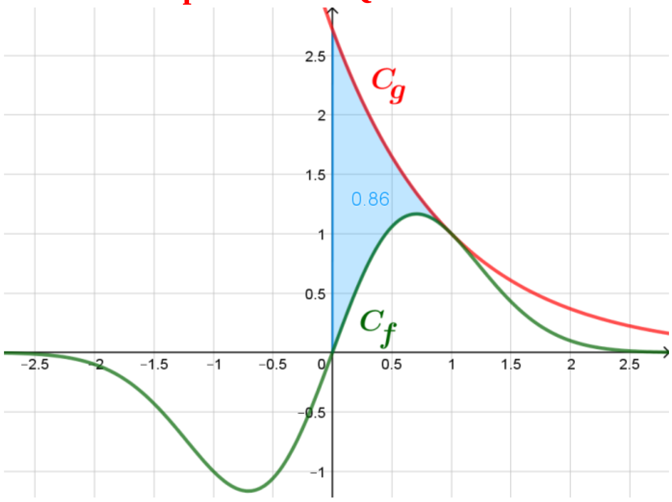
1) Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
2) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.
3) On a tracé les courbes C_f et C_g. Identifier chaque courbe puis déterminer l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. L'unité est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.



Exercice 2B.1 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = xe^{1-x^2}$ *et* $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f *et* C_g *respectivement des fonctions f et g.*



1) *Trouver une primitive F et G des fonctions f et g sur* $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 1 - x^2$ donc $u'(x) = -2x$.

Ainsi : $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times u'(x) \times e^{u(x)}$

Donc : $F(x) = \times e^{u(x)} = -\dfrac{1}{2}e^{1-x^2}$.

De même : $G(x) = -e^{1-x}$.

2) *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)dx$.

$$\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)dx = \int_0^1 e^{1-x}dx - \int_0^1 xe^{1-x^2}dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1$$

$$= -e^{1-1} + e^{1-0} - \left(-\frac{1}{2}e^{1-1^2} + \frac{1}{2}e^{1-0^2}\right) = -e^0 + e^1 - \left(-\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^1\right)$$

$$= -1 + e + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1) \simeq 0{,}859$$

3) *Interpréter graphiquement ce résultat.*

Cette intégrale représente l'aire coloriée ci-dessus, délimitée par les courbes C_f et C_g, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2B.2 :

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

On note C_f *et* C_g *les courbe respectives des fonction f et g.*

1) *Démontrer que les courbes* C_f *et* C_g *admettent deux points communs dont on précisera les coordonnées.*

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \ln^2 x = \ln x \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 1) = 0$$

Soit $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Soit $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^1 = e$.

Or $f(1) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0$ et $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.

Les coordonnées des points d'intersection sont : $(1;0)$ et $\left(e;\dfrac{1}{e}\right)$.

2) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

$$g(x)-f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\left(\ln^2 x-\ln x\right)=\frac{\ln x}{x}(\ln x-1)$$

Etude du signe avec $x>0$:

$\ln x>0 \iff x>e^0 \iff x>1$

$\ln x-1>0 \iff \ln x>1 \iff x>e^1 \iff x>e$

Tableau de signe :

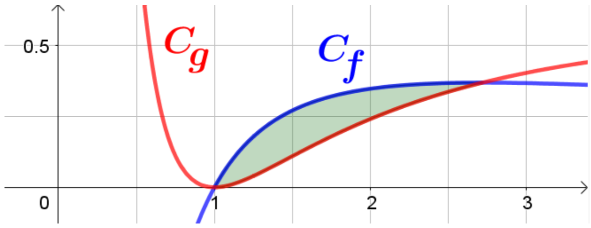
x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)-f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x\in\left]0;1\right[\cup\left]e;+\infty\right[$: $g(x)-f(x)>0$: la courbe C_g est au-dessus de la courbe C_f.

Si $x\in\left]1;e\right[$: $g(x)-f(x)<0$: la courbe C_g est au-dessous de la courbe C_f.

3) On a tracé les courbes C_f et C_g. Identifier chaque courbe puis déterminer l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. L'unité est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Si $x\in\left]1;e\right[$: la courbe C_g est au-dessous de la courbe C_f donc la courbe rouge représente la fonction g.



L'aire cherchée est donc :

$$\int_1^e f(x)-g(x)\,dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}-\frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx-\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

On pose $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\frac{1}{x}$. Ainsi l'intégrale devient :

$$\int_1^e u'(x)\times u(x)\,dx-\int_1^e u'(x)\times u^2(x)\,dx=\left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_1^e-\left[\frac{u^3(x)}{3}\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln^2(e)-\ln^2(1)\right)-\frac{1}{3}\left(\ln^3(e)-\ln^3(1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1-0)-\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{6}\text{ u.a.}$$

Pr une unité d'aire mesure :

$2\times 4=8\text{ cm}^2$

L'aire cherchée est donc :

$\frac{1}{6}\times 8=\frac{4}{3}\simeq 1{,}33\text{ cm}^2$.