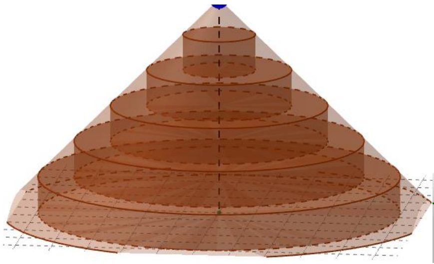
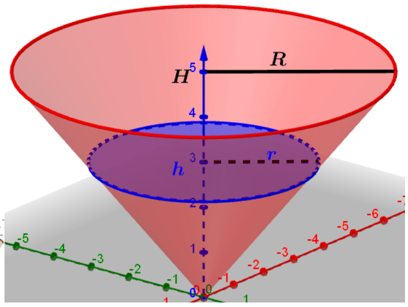
CES FIGURES SONT ISSUES D'INTERNET

EXERCICES 3A.1

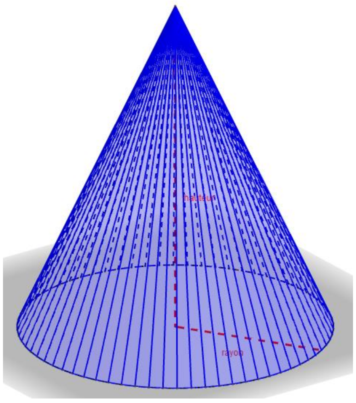
Calculer le volume d'un cône de révolution avec les intégrales de deux manières :

1) En découpant le cône en une multitude de disques horizontaux fins



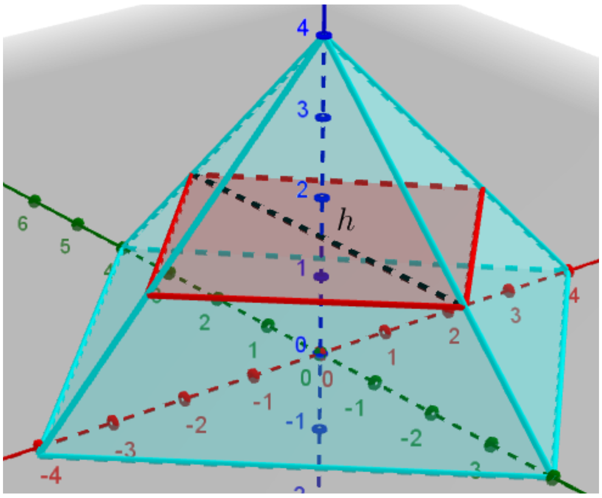


2) En découpant le cône en une multitude de triangles rectangles



EXERCICES 3A.2

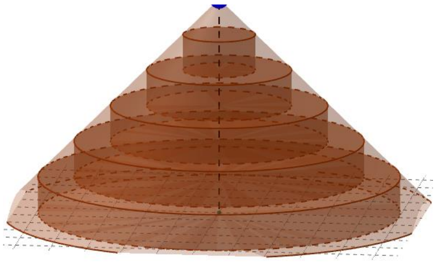
Calculer le volume d'un cône d'une pyramide à base rectangulaire de dimensions $L \times l$ et de hauteur H en la découpant en une multitude de pavés droits élémentaires.

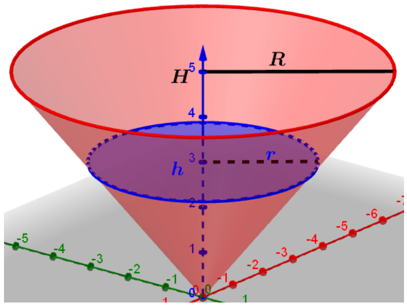


EXERCICES 3A.1

Calculer le volume d'un cône de révolution avec les intégrales de deux manières :

1) *En découpant le cône en une multitude de disques horizontaux fins*





Les dimensions du cône sont : rayon R et hauteur H

Le rayon d'un disque intermédiaire est *r* et son épaisseur est *dh*.

Le volume du cône est la somme de tous ces disques « élémentaires » du plus petit au plus grand:

$$V=\int_0^H \pi\times r^2 dh$$

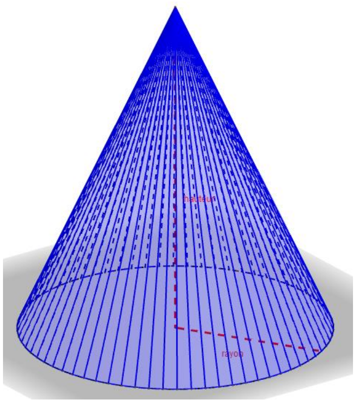
Or d'après le théorème de Thalès : $\frac{h}{H}=\frac{r}{R}$ donc $r=\frac{R}{H}\times h$.

Ainsi :

$$V=\int_0^H \pi\times r^2 dh=\int_0^H \pi\times\left(\frac{R}{H}\times h\right)^2 dh=\int_0^H \pi\frac{R^2}{H^2}\times h^2 dh=\left[\pi\frac{R^2}{H^2}\times\frac{h^3}{3}\right]_0^H=\pi\frac{R^2}{H^2}\times\frac{H^3}{3}=\frac{\pi R^2 H}{3}$$

$$=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{3}$$

2) En découpant le cône en une multitude de triangles rectangles d'épaisseur infime non régulière



https://www.geogebra.org/m/na3gBdAe#material/v2SX7eeJ

Les dimensions du cône sont : rayon R et hauteur H

Le volume du cône est la somme de tous les triangles rectangles « élémentaires ».

L'aire d'un triangle rectangle élémentaire est $\frac{R\times H}{2}$ mais son épaisseur n'est pas régulière en raison du rétrécissement au sommet et à proximité de l'axe du cône.

La difficulté à exprimer l'épaisseur de chaque triangle élémentaire rend cette méthode trop ardue.

EXERCICES 3A.2

Calculer le volume d'un cône d'une pyramide à base rectangulaire de dimensions $L\times l$ *et de hauteur H en la découpant en une multitude de pavés droits élémentaires.*

Chaque pavé élémentaire a pour dimensions $x\times y$ **et pour épaisseur** dh**.**

Le volume de la pyramide est la somme de tous ces pavés « élémentaires » du plus grand au plus petit :

$$S=\int_0^H (x\times y)\,dh$$

Or d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{H-h}{H}=\dfrac{x}{L}=\dfrac{y}{l}$ donc $x=L\times\dfrac{H-h}{H}$ et $y=l\times\dfrac{H-h}{H}$.

Ainsi le volume devient :

$$S=\int_0^H\left(L\times\frac{H-h}{H}\times l\times\frac{H-h}{H}\right)dh=\int_0^H\left(\frac{L\times l}{H^2}\times(H-h)^2\right)dh=\frac{L\times l}{H^2}\times\int_0^H\left(H^2-2Hh+h^2\right)dh$$

$$=\frac{L\times l}{H^2}\times\left[H^2h-Hh^2+\frac{h^3}{3}\right]_0^H=\frac{L\times l}{H^2}\times\left(H^3-H^3+\frac{H^3}{3}\right)=\frac{L\times l\times H^3}{3H^2}=\frac{L\times l\times H}{3}$$