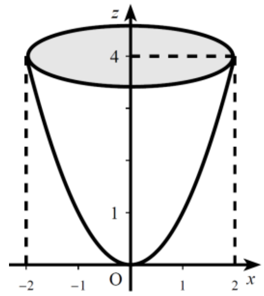
Calculs de volumes

Exercice 3B.1 : **Volume d'un phare**

Calculer le volume V du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ du morceau de parabole d'équation :

$$z = x^2$$

$(0 \leq x \leq 2)$ dans le plan $(x\mathrm{O}z)$; unité 6 cm

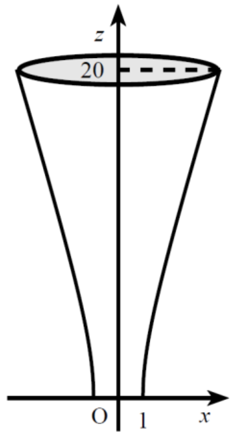


Exercice 3B.2 : **Contenance d'un château d'eau**

L'intérieur d'un château d'eau a la forme du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de $(\mathrm{O}z)$ la branche d'hyperbole définie par :

$$z = 5\sqrt{x^2 - 1}$$

$(0 \leq z \leq 20)$. L'unité étant égale à 2 m, calculer la contenance du château d'eau (en hectolitre).

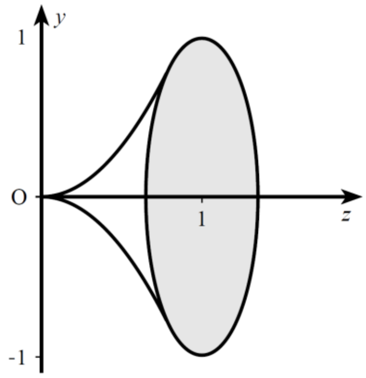


Exercice 3B.3 : **La trompette**

Déterminer le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

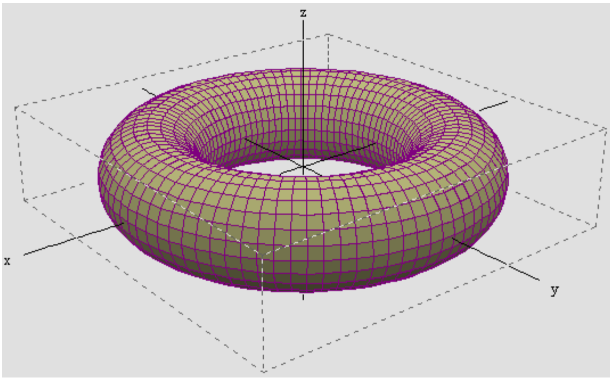
$$y = z^2$$

avec $0 \leq z \leq 1$.



Exercice 3B.4 : **Le tore**

Déterminer le volume d'un tore de grand rayon R et de rayon intérieur r.



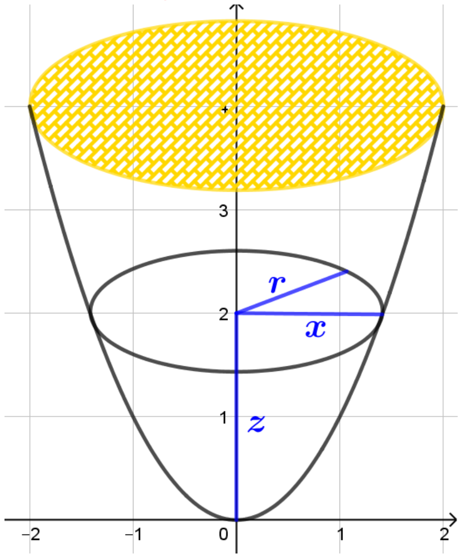
CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 3B.1 : Volume d'un phare

Calculer le volume V du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$z = x^2$$

$(0 \le x \le 2)$ *dans le plan* $(x\mathrm{Oz})$ *; unité 6 cm*



On découpe le phare en une infinité de disques horizontaux extrêmement fins :

→le volume de chaque disque est : $\pi r^2 \times dz$

Le volume du phare est :

$$\int_0^4 \pi r^2 \times dz$$

Or le phare est obtenu par rotation de la parabole autour de (Oz) :

$$\pi r^2 = \pi x^2 = \pi \times z$$

Donc : $$\int_0^4 \pi r^2 \times dz = \int_0^4 \pi z \times dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi \ u.v.$$

Or une unité de volume mesure :

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ cm}^3 .$$

Le volume du phare est :

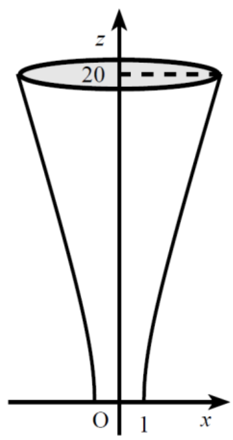
$$8\pi \times 216 \text{ cm}^3 = 1728\pi \text{ cm}^3 \simeq 5426 \text{ cm}^3$$

Exercice 3B.2 : Contenance d'un château d'eau

L'intérieur d'un château d'eau a la forme du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de (Oz) la branche d'hyperbole définie par :

$$z = 5\sqrt{x^2 - 1} \qquad (0 \le z \le 20).$$

L'unité étant égale à 2 m, calculer la contenance du château d'eau (en hectolitre).



On découpe le château d'eau en une infinité de disques horizontaux extrêmement fins :

→le volume de chaque disque est : $\pi r^2 \times dz$

Le volume du château d'eau est : $\int_0^{20} \pi r^2 \times dz$.

Le château d'eau est obtenu par rotation de la branche d'hyperbole autour de (Oz) :

$$\pi r^2 = \pi x^2 .$$

Or : $$z = 5\sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \frac{z}{5} = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{5} \right)^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{25} + 1 = x^2$$

Ainsi : $$\int_0^{20} \pi r^2 \times dz = \int_0^{20} \pi x^2 \times dz = \int_0^{20} \pi \left(\frac{z^2}{25} + 1 \right) \times dz = \pi \left[\frac{1}{25} \times \frac{z^3}{3} + z \right]_0^{20}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{25} \times \frac{20^3}{3} + 20 \right) = \pi \left(\frac{1}{25} \times \frac{8000}{3} + 20 \right) = \pi \left(\frac{320}{3} + \frac{60}{3} \right) = \frac{380}{3} \pi \ u.v.$$

Or une unité de volume mesure :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ m}^3 .$$

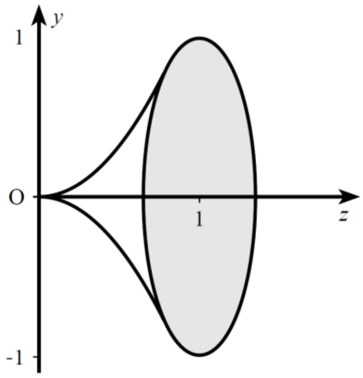
Le volume du château d'eau est :

$$\frac{380}{3}\pi\times 8\ \text{m}^3=\frac{3040}{3}\pi\ \text{m}^3\simeq 3183,48\ \text{m}^3.$$

Exercice 3B.3 : La trompette

Déterminer le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$y=z^2 \qquad \textit{avec}\ \ 0\le z\le 1.$$



On découpe la trompette en une infinité de disques verticaux extrêmement fins :

→le volume de chaque disque est : $\pi r^2\times dz$

Le volume de la trompette est :

$$\int_0^1 \pi r^2\times dz$$

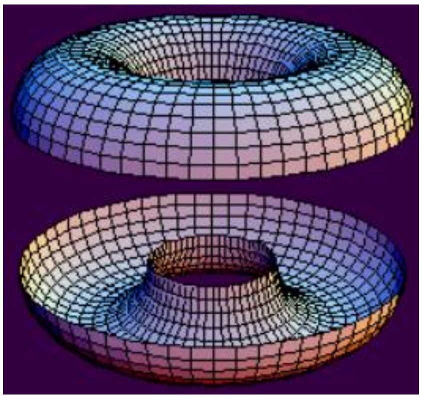
Or la trompette est obtenue par rotation de la parabole autour de (Oz) :

$$\pi r^2=\pi y^2=\pi\times z^4$$

Donc : $$\int_0^1 \pi r^2\times dz=\int_0^1 \pi z^4\times dz=\pi\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)=\frac{\pi}{5}\ u.v.$$

Exercice 3B.4 : Le tore

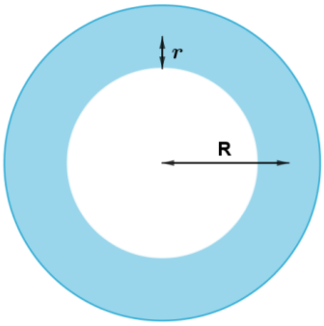
Déterminer le volume d'un tore de grand rayon R et de rayon intérieur r.



Première méthode :
(par Jean Groeninger, avec la participation de Geoffrey Blaizot)

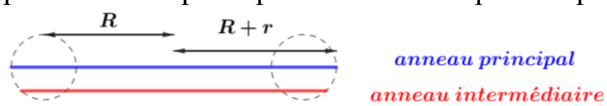
On découpe le tore en une infinité d'anneaux fins horizontaux :

Si on coupe le tore horizontalement en passant par son centre, on obtient l'anneau suivant, vu de dessus :



Cette découpe horizontale va déterminer des anneaux dont le rayon intérieur va varier.

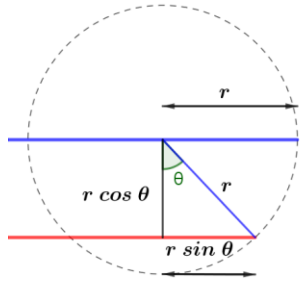
Vu de face, si on compare l'anneau principal et un anneau quelconque de la découpe, voici ce que l'on obtient :



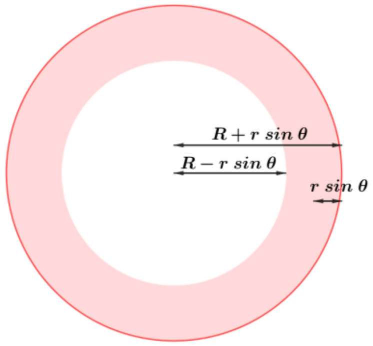
Il faut déterminer le rayon de chaque anneau intermédiaire, on va zoomer sur la partie droite du dessin.

En exprimant l'angle θ variant de 0 à π, comme indiqué, on obtient :

- si le décalage par rapport à l'anneau principal est égal à $r\cos\theta$,
- le rayon intérieur de chaque anneau est égal à $r\sin\theta$.



Un schéma met en évidence les valeurs obtenues :



L'aire de chaque anneau intermédiaire est égale à la différence des aires de deux disques :

$$\pi(R+r\sin\theta)^2-\pi(R-r\sin\theta)^2=4\pi Rr\sin\theta.$$

En appelant (Oz) l'axe vertical, on doit faire la somme de tous ces anneaux intermédiaires le long de l'axe (Oz), d'une distance de $-r$ à r.

Nous allons calculer le double de l'intégrale de 0 à r :

$$V_{tore}=2\int_0^r 4\pi Rr\sin\theta dz.$$

Or nous avions montré sur le deuxième schéma que la hauteur *z* est égale à $r\cos\theta$, donc :

$$dz=-r\sin\theta\times d\theta$$

Mais dz est une épaisseur élémentaire et doit être positif, ce qui n'est pas le cas sur l'intervalle $[0;\pi]$, donc :

$$dz=|-r\sin\theta\times d\theta|=r\sin\theta\times d\theta$$

θ variant de 0 à π. Ainsi :

$$V_{tore}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\pi Rr\sin\theta\times r\sin\theta\times d\theta=8\pi Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\times d\theta$$

Or $\quad\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \;\Leftrightarrow\; \cos 2\theta-1=-2\sin^2\theta \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\cos 2\theta-1}{-2}=\sin^2\theta$

$$\Leftrightarrow\; \sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

Donc le volume du tore devient :

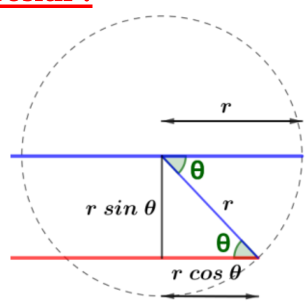
$$V_{tore}=8\pi Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=8\pi Rr^2\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=8\pi Rr^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{4}\right)=8\pi Rr^2\times\frac{\pi}{4}=2\pi^2Rr^2$$

Variante de la première méthode en prenant un autre angle pour avoir un *dz* positif :

L'aire de chaque anneau intermédiaire est égale à la différence des aires de deux disques :

$$\pi(R+r\cos\theta)^2-\pi(R-r\cos\theta)^2=4\pi Rr\cos\theta.$$



En appelant (Oz) l'axe vertical, on doit faire la somme de tous ces anneaux intermédiaires le long de l'axe (Oz), d'une distance de $-r$ à r.

Nous allons calculer le double de l'intégrale de 0 à r :

$$V_{tore}=2\int_0^r 4\pi Rr\cos\theta dz.$$

Or nous avions montré sur le deuxième schéma que la hauteur z est égale à $r\sin\theta$, donc :

$$dz = r\cos\theta \times d\theta$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$V_{tore} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\pi Rr\cos\theta \times r\cos\theta \times d\theta = 8\pi Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \times d\theta$$

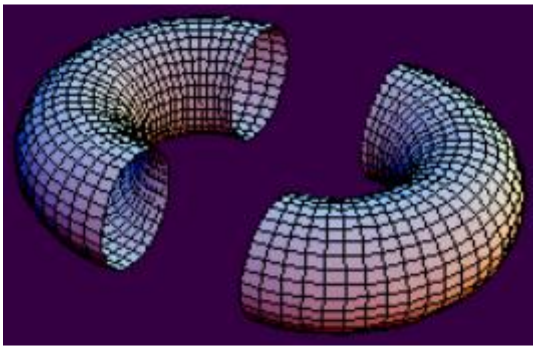
Or $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Leftrightarrow \cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

Donc le volume du tore devient :

$$V_{tore} = 8\pi Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = 8\pi Rr^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

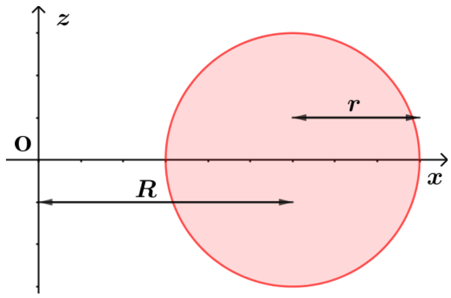
$$= 8\pi Rr^2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{4}\right) = 8\pi Rr^2 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 Rr^2$$

Deuxième méthode :

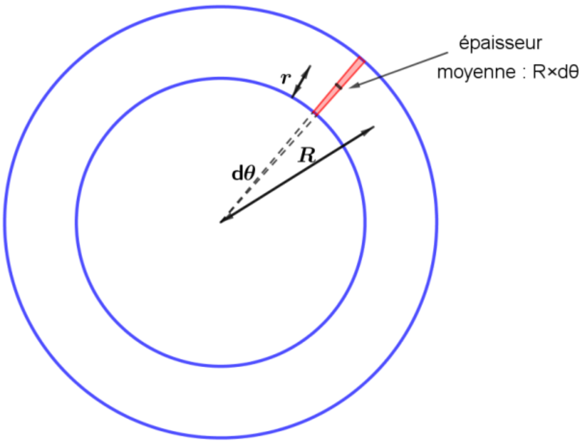


On découpe le tore en une infinité de disques fins verticaux puisque ce tore peut être engendré par la rotation d'un seul de ces disques autour de l'axe vertical (Oz) :

Chacun de ces disques a une aire égale à πr^2, on se place dans le plan (xOz) :



L'épaisseur moyenne de chaque disque élémentaire est : $R \times d\theta$ (vue d'en-dessus) :



donc le volume élémentaire de chaque disque intermédiaire est :

$$\pi r^2 \times R d\theta$$

Le volume du tore s'obtient par la rotation de ce disque autour de l'axe (Oz).

$$V_{tore} = 2\int_0^{\pi} \pi r^2 \times R d\theta = 2\pi r^2 R \times \int_0^{\pi} d\theta = 2\pi r^2 R \times [\theta]_0^{\pi} = 2\pi r^2 R \times \pi = 2\pi^2 r^2 R.$$