VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

EXERCICES 4A.1

Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

a) $f(x)=x^2+2x+3$ sur l'intervalle $[1;5]$.

b) $f(x)=10x\times e^{x^2}$ sur l'intervalle $[0;10]$.

c) $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x^2+10x-7}$ sur l'intervalle $[1;5]$.

EXERCICES 4A.2

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\dfrac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$.

a) Déterminer une primitive de f.

b) Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[50;100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2}.

EXERCICES 4A.3

On donne la valeur moyenne μ = 2 d'une fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.

Déterminer $\int_1^4 f(x)\,dx$.

EXERCICES 4A.4

Calculer la valeur moyenne μ sur l'intervalle $[-1;1]$ de la fonction $f : x\mapsto\sqrt{1-x^2}$.

(Indication : on pourra penser au cercle de centre O et de rayon 1)

EXERCICES 4A.5

La progression de la population d'une nation est donnée, en millions de personnes par $P(t)=18e^{0,034t}$, à compter d'une année $t=0$.

1) Calculer la population au bout de 25 ans.
2) Calculer la valeur moyenne de la population au bout de 25 ans.
3) A l'aide de votre calculatrice, déterminer à quelle date la population atteint la valeur moyenne de ces 25 années.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICES 4A.1

Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

a) $f(x)=x^2+2x+3$ sur l'intervalle $[1;5]$.

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{5-1}\int_1^5 x^2+2x+3dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_1^5\\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{5^3}{3}+5^2+3\times5\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1^2+3\times1\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{125}{3}+25+15\right)-\left(\frac{1}{3}+1+3\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{3}+40-\frac{1}{3}-4\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{124}{3}+36\right)=\frac{36}{3}+9=\frac{63}{3}=21
\end{aligned}$$

b) $f(x)=10x\times e^{x^2}$ sur l'intervalle $[0;10]$.

On pose $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$. Ainsi :

$$f(x)=5\times2x\times e^{x^2}=5\times u'(x)\times e^{u(x)}.$$

Une primitive de f est :

$$F(x)=5\times e^{u(x)}=5\times e^{x^2}$$

La valeur moyenne cherchée est :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(x)dx\\
&= \frac{1}{10}\left[5\times e^{x^2}\right]_0^{10}\\
&= \frac{1}{10}\left[5\times e^{10^2}-5\times e^{0^2}\right]\\
&= \frac{1}{10}\times5\left(e^{100}-1\right)=\frac{1}{2}\left(e^{100}-1\right)
\end{aligned}$$

c) $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x^2+10x-7}$ sur l'intervalle $[1;5]$.

On pose $u(x)=2x^2+10x-7$ donc $u'(x)=4x+10$. Ainsi :

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{4x+10}{2x^2+10x-7}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Une primitive de f est :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln|u(x)|=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2+10x-7\right|=\frac{1}{2}\ln\left(2x^2+10x-7\right).$$

La valeur moyenne cherchée est :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left(2x^2+10x-7\right)\right]_1^5
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left[\ln\left(2\times5^2+10\times5-7\right)-\ln\left(2\times1^2+10\times1-7\right)\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[\ln(50+50-7)-\ln(2+10-7)\right]$$
$$=\frac{1}{8}(\ln 93-\ln 5)$$

EXERCICES 4A.2

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(t)=\dfrac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$.

a) *Déterminer une primitive de f.*

On pose $u(x)=e^{0,04t}+19$ donc $u'(x)=0,04e^{0,04t}$. Ainsi :

$$f(t)=\frac{2}{0,04}\times\frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}=50\times\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Une primitive de f est :

$$F(x)=50\ln\left|u(x)\right|=50\ln\left|e^{0,04t}+19\right|=50\ln\left(e^{0,04t}+19\right).$$

b) *Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle* $[50;100]$. *En donner une valeur approchée à* 10^{-2}.

$$\mu=\frac{1}{100-50}\int_{50}^{100}f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{50}\left[50\ln\left(e^{0,04t}+19\right)\right]_{50}^{100}$$
$$=\frac{1}{50}\left[50\ln\left(e^{0,04\times100}+19\right)-50\ln\left(e^{0,04\times50}+19\right)\right]$$
$$=\ln\left(e^4+19\right)-\ln\left(e^2+19\right)$$
$$\simeq 1,03$$

EXERCICES 4A.3

On donne la valeur moyenne μ = 2 d'une fonction f sur l'intervalle $[1;4]$. *Déterminer* $\int_1^4 f(x)\,dx$.

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,dx=2$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx=2$$
$$\Leftrightarrow\ \int_1^4 f(x)\,dx=6$$

EXERCICES 4A.4

Calculer la valeur moyenne μ sur l'intervalle $[-1;1]$ *de la fonction* $f : x\mapsto\sqrt{1-x^2}$.

(Indication : on pourra penser au cercle de centre O et de rayon 1)

Sur l'intervalle $[-1;1]$, les points de la courbe représentant la fonction *f* sont de la forme $\mathrm{M}(x;y)$ tels que :

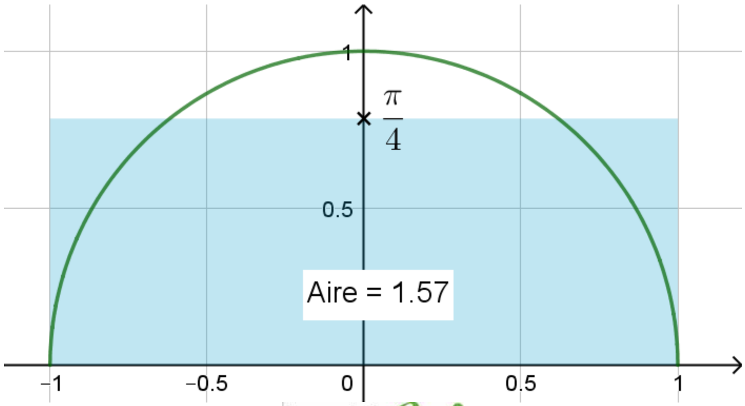
$$y=\sqrt{1-x^2}\ \Leftrightarrow\ y^2=1-x^2\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2=1\ \text{ avec } y\geq 0.$$

On reconnait l'équation d'un demi-cercle de centre O et de rayon égal à 1.
L'aire sous la courbe est égale au demi-disque de rayon 1, soit :

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}.$$

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[-1;1\right]$ est :

$$\mu = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$



Exercices 4A.5

La progression de la population d'une nation est donnée, en millions de personnes par $P\left(t\right)=18e^{0,034t}$ *, à compter d'une année* $t=0$.

1) *Calculer la population au bout de 25 ans :* $P\left(25\right)=18e^{0,034\times 25}\simeq 42{,}1$ millions

2) *Calculer la valeur moyenne de la population au bout de 25 ans.*

$$\frac{1}{25-0}\int_0^{25} P\left(t\right)dt = \frac{1}{25}\int_0^{25} 18e^{0,034t}dt$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{18}{0,034}e^{0,034t}\right]_0^{25}$$

$$= \frac{1}{25}\times\frac{18}{0,034}\times\left(e^{0,034\times 25}-e^{0,034\times 0}\right)$$

$$= \frac{18}{0,85}\times\left(e^{0,85}-1\right) = \frac{360}{17}\left(e^{0,85}-1\right)\simeq 28,37 \text{ millions.}$$

3) A l'aide de votre calculatrice, déterminer à quelle date la population atteint la valeur moyenne de ces 25 années.

$$P\left(t\right) > 28,37 \iff 18e^{0,034t} > 28,37 \iff e^{0,034t} > \frac{28,37}{18} \iff 0,034t > \ln\frac{28,37}{18}$$

$$\iff t > \frac{1}{0,034}\ln\frac{28,37}{18} \iff t > 13,4 \text{ années.}$$