EXERCICE 4B.1

1. Une voiture s'apprête à effectuer un test d'accélération. A l'instant t = 0, le pilote démarre et accélère pendant 1000 mètres. On admettra qu'à tout instant t, la vitesse (en m/s) de la voiture est donnée par la fonction : $v(t) = 68\left(1 - e^{\frac{-t}{18}}\right)$

- **a.** Vérifier qu'à l'instant t = 0, la voiture est immobile.
- **b.** Quelle est la vitesse atteinte par la voiture au bout de 10 secondes ?
- **c.** Quelle est la vitesse maximale théorique de la voiture ?
- **d.** Au bout de combien de temps franchit-on la barre des 200 km/h ?
- **e.** Quelle est la vitesse moyenne de la voiture sur les 30 premières secondes ?
- **f.** Quelle est la distance parcourue pendant les 30 premières secondes ?

2. On modifie la transmission de la voiture en installant une boite de vitesse plus courte et on recommence l'expérience. La vitesse est désormais donnée par : $w(t) = 65\left(1 - e^{\frac{-t}{15}}\right)$

Reprendre les questions **a.** à **f.** avec ces nouveaux réglages.

EXERCICES 4B.2

Un moteur de compétition a une courbe de puissance (en kW) que l'on a réussi à modéliser sur l'intervalle [1000 ; 9500] par la fonction : $P(t) = \dfrac{10\,500 - t}{15\,000}\, e^{\frac{t}{1\,600} + 3}$

où t est le régime moteur, exprimé en *tours/minute*

a. Quelle est la puissance à 1 000 tr/min ?
b. Quelle est la puissance à 8 500 tr/min ?
c. Pour quel régime moteur la puissance est-elle maximale ? Quelle est cette puissance ?
d. Vérifier que la fonction $f(t) = \dfrac{19\,360\,000 - 1600t}{15\,000} e^{\frac{t}{1600}+3}$ est une primitive de P.
e. Le moteur est principalement utilisé entre dans un régime compris entre 7000 et 9000 tr/min. Calculer sa puissance moyenne dans cette plage.

EXERCICE 4B.3

La température f en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement exprimé en heures.

La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 30 - 10e^{-0{,}1t}$

1. Déterminer la température du lubrifiant :
- **a.** A l'arrêt.
- **b.** Au bout de vingt quatre heures.

2. On s'intéresse au comportement de la fonction f en $+\infty$.
- **a.** Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
- **b.** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
- **c.** Donner une signification concrète de ce résultat pour le lubrifiant.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
- **a.** Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
- **b.** Construire la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans le repère orthogonal (O ; I, J) donné ci-dessous.

4. A quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28°C ? Donner une valeur approchée à l'heure près puis à la minute près du résultat.

5. Calculer la température moyenne du lubrifiant entre la cinquième et la dixième heure de fonctionnement.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 4B.1

1. Une voiture s'apprête à effectuer un test d'accélération. A l'instant $t = 0$, le pilote démarre et accélère pendant 1000 mètres. On admettra qu'à tout instant t, la vitesse (en m/s) de la voiture est donnée par la fonction : $v(t)=68\left(1-e^{\frac{-t}{18}}\right)$

a. A l'instant $t = 0$: $v(0)=68\left(1-e^{\frac{-0}{18}}\right)=68\times(1-1)=0 \rightarrow$ la voiture est immobile.

b. Vitesse de la voiture au bout de 10 secondes : $v(10)=68\left(1-e^{\frac{-10}{18}}\right)\simeq 29\ \ m/s$

c. Vitesse maximale théorique de la voiture : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{-t}{18}}=0$ donc $v_{\max}=68\ \ m/s$

d. $200\ \ km/h=200\ 000\ \ m/3600\,s=\dfrac{200\ 000}{3\ 600}\ \ m/s=\dfrac{500}{9}\ \ m/s\simeq 55,56\ \ m/s$

$$v(t)>\frac{500}{9} \Leftrightarrow 68\left(1-e^{\frac{-t}{18}}\right)>\frac{500}{9} \Leftrightarrow 1-e^{\frac{-t}{18}}>\frac{500}{9\times 68} \Leftrightarrow -e^{\frac{-t}{18}}>\frac{125}{9\times 17}-1 \Leftrightarrow -e^{\frac{-t}{18}}>\frac{125}{153}-\frac{153}{153}$$

$$\Leftrightarrow -e^{\frac{-t}{18}}>-\frac{28}{153} \Leftrightarrow e^{\frac{-t}{18}}<\frac{28}{153} \Leftrightarrow \frac{-t}{18}<\ln\frac{28}{153} \Leftrightarrow -t<18\ln\frac{28}{153} \Leftrightarrow t>-18\ln\frac{28}{153}$$

La voiture franchit la barre des 200 km/h au bout d'environ 30,6 secondes.

e. Vitesse moyenne de la voiture sur les 30 premières secondes :

$$v_{moy30}=\frac{1}{30}\int_0^{30}v(t)\,dt=\frac{1}{30}\int_0^{30}\left(68-68e^{\frac{-t}{18}}\right)dt=\frac{68}{30}\int_0^{30}\left(1-e^{\frac{-t}{18}}\right)dt=\frac{68}{30}\left[t+18e^{\frac{-t}{18}}\right]_0^{30}$$

$$=\frac{68}{30}\left(30+18e^{\frac{-30}{18}}-0-18e^{\frac{-0}{18}}\right)=\frac{34}{15}\left(30+18e^{\frac{-30}{18}}-18\right)=\frac{34}{15}\left(12+18e^{\frac{-30}{18}}\right)\simeq 34,9\ \ m/s$$

f. Distance parcourue pendant les 30 premières secondes : on connait la vitesse moyenne sur les 30 premières secondes, donc : $d=v_{moy30}\times 30\simeq 34,9\times 30\simeq 1047\ \ m$

2. On modifie la transmission de la voiture en installant une boite de vitesse plus courte et on recommence l'expérience. La vitesse est désormais donnée par : $w(t)=65\left(1-e^{\frac{-t}{15}}\right)$

a. A l'instant $t = 0$: $w(0)=65\left(1-e^{\frac{-0}{15}}\right)=65\times(1-1)=0 \rightarrow$ la voiture est immobile.

b. Vitesse de la voiture au bout de 10 secondes : $w(10)=65\left(1-e^{\frac{-10}{15}}\right)=65\left(1-e^{\frac{-2}{3}}\right)\simeq 31,6\ \ m/s$

c. Vitesse maximale théorique de la voiture : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{-t}{15}}=0$ donc $w_{\max}=65\ \ m/s$

d. $200\ \ km/h=200\ 000\ \ m/3600\,s=\dfrac{200\ 000}{3\ 600}\ \ m/s=\dfrac{500}{9}\ \ m/s\simeq 55,56\ \ m/s$

$$w(t)>\frac{500}{9}\iff 65\left(1-e^{\frac{-t}{15}}\right)>\frac{500}{9}\iff 1-e^{\frac{-t}{15}}>\frac{500}{9\times 65}\iff -e^{\frac{-t}{15}}>\frac{100}{9\times 13}-1\iff -e^{\frac{-t}{15}}>\frac{100}{117}-\frac{117}{117}$$

$$\iff -e^{\frac{-t}{15}}>-\frac{17}{117}\iff e^{\frac{-t}{15}}<\frac{17}{117}\iff \frac{-t}{15}<\ln\frac{17}{117}\iff -t<15\ln\frac{17}{117}\iff t>-15\ln\frac{17}{117}$$

La voiture franchit la barre des 200 km/h au bout d'environ 28,9 secondes.

e. Vitesse moyenne de la voiture sur les 30 premières secondes :

$$w_{moy30}=\frac{1}{30}\int_0^{30}w(t)\,dt=\frac{1}{30}\int_0^{30}\left(65-65e^{\frac{-t}{15}}\right)dt=\frac{65}{30}\int_0^{30}\left(1-e^{\frac{-t}{15}}\right)dt=\frac{13}{6}\left[t+15e^{\frac{-t}{15}}\right]_0^{30}$$

$$=\frac{13}{6}\left(30+15e^{\frac{-30}{15}}-0-15e^{\frac{-0}{15}}\right)=\frac{13}{6}\left(30+15e^{-2}-15\right)=\frac{34}{15}\left(15+15e^{-2}\right)=34\left(1+e^{-2}\right)\simeq 38,6\ \ m/s$$

f. Distance parcourue pendant les 30 premières secondes : on connait la vitesse moyenne sur les 30 premières secondes, donc : $d=w_{moy30}\times 30\simeq 38,6\times 30\simeq 1158\ \ m$

EXERCICES 4B.2

Un moteur de compétition a une courbe de puissance (en kW) que l'on a réussi à modéliser sur l'intervalle [1000 ; 9500] par la fonction :

$$P(t)=\frac{10\,500-t}{15\,000}\,e^{\frac{t}{1\,600}+3}$$ où t est le régime moteur, exprimé en *tours/minute*

a. A 1 000 tr/min : $P(1000)=\dfrac{10\,500-1\,000}{15\,000}e^{\frac{1000}{1600}+3}=\dfrac{9\,500}{15\,000}e^{\frac{10}{16}+3}=\dfrac{95}{150}e^{\frac{5}{8}+\frac{24}{8}}=\dfrac{19}{30}e^{\frac{29}{8}}\simeq 23,77\ \ kW$

b. A 8 500 tr/min : $P(8500)=\dfrac{10\,500-8\,500}{15\,000}e^{\frac{8500}{1600}+3}=\dfrac{2\,000}{15\,000}e^{\frac{85}{16}+3}=\dfrac{2}{15}e^{\frac{85}{16}+\frac{48}{16}}=\dfrac{2}{15}e^{\frac{133}{16}}\simeq 543,26\ \ kW$

c. Cette fonction Puissance est dérivable en tant que produit de fonctions polynomiales et exponentielles.

$$\forall t\in[1000;9500],\ P'(t)=\frac{-1}{15\,000}e^{\frac{t}{1600}+3}+\frac{10\,500-t}{15\,000}\times\frac{1}{1600}e^{\frac{t}{1600}+3}=\frac{1}{15\,000}\left(-1+\frac{10\,500-t}{1600}\right)e^{\frac{t}{1600}+3}$$

$$P'(t)>0\iff -1+\frac{10\,500-t}{1600}>0\iff \frac{10\,500-t}{1600}>1\iff 10\,500-t>1600\iff 10\,500-1600>t$$

Soit pour $t<8\,900$ *tours/minute*

t	1000		8900		9500
$P'(t)$		+	0	–	
$P(t)$		↗		↘	

La puissance est maximale pour 8900 tours/minute ;

$$P_{\max}=P(8900)=\frac{10\,500-8\,900}{15\,000}e^{\frac{8900}{1600}+3}=\frac{1\,600}{15\,000}e^{\frac{89}{16}+3}=\frac{16}{150}e^{\frac{89}{16}+\frac{48}{16}}=\frac{8}{75}e^{\frac{137}{16}}\simeq 558,05\ \ kW$$

d. Vérifier que la fonction $f(t)=\dfrac{19\,360\,000-1600t}{15\,000}e^{\frac{t}{1600}+3}$ est une primitive de P.

$$f'(t)=\frac{-1\,600}{15\,000}e^{\frac{t}{1600}+3}+\frac{19\,360\,000-1\,600t}{15\,000}\times\frac{1}{1600}e^{\frac{t}{1600}+3}=\frac{1}{15\,000}\left(-1600+\frac{19\,360\,000-1\,600t}{1600}\right)e^{\frac{t}{1600}+3}$$

$$= \frac{1}{15\,000}\left(-1600+\frac{19\,360\,000}{1600}-t\right)e^{\frac{t}{1600}+3} = \frac{1}{15\,000}\left(-1600+12\,100-t\right)e^{\frac{t}{1600}+3} = \frac{10\,500-t}{15\,000}e^{\frac{t}{1600}+3}$$

e. Le moteur est principalement utilisé entre dans un régime compris entre 7000 et 9000 tr/min. Calculer sa puissance moyenne dans cette plage.

$$P_{moy} = \frac{1}{9000-7000}\int_{7000}^{9000} P(t)\,dt = \frac{1}{2000}\left[\frac{19\,360\,000-1600t}{15\,000}e^{\frac{t}{1600}+3}\right]_{7000}^{9000}$$

$$= \frac{1}{2000}\left(\frac{19\,360\,000-1600\times 9000}{15\,000}e^{\frac{9000}{1600}+3} - \frac{19\,360\,000-1600\times 7000}{15\,000}e^{\frac{7000}{1600}+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2000}\left(\frac{19\,360-1600\times 9}{15}e^{\frac{90}{16}+3} - \frac{19\,360-1600\times 7}{15}e^{\frac{70}{16}+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2000}\left(\frac{19\,360-14\,400}{15}e^{\frac{45}{8}+\frac{24}{8}} - \frac{19\,360-11\,200}{15}e^{\frac{35}{8}+\frac{24}{8}}\right) = \frac{1}{2000}\left(\frac{14\,960}{15}e^{\frac{69}{8}} - \frac{18\,160}{15}e^{\frac{59}{8}}\right)$$

$$= \frac{1}{200}\left(\frac{1496}{15}e^{\frac{69}{8}} - \frac{1816}{15}e^{\frac{59}{8}}\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{748}{15}e^{\frac{69}{8}} - \frac{908}{15}e^{\frac{59}{8}}\right) = \frac{748}{1500}e^{\frac{69}{8}} - \frac{908}{1500}e^{\frac{59}{8}}$$

$$\simeq 1811{,}3\ kW$$

EXERCICE 4B.3

La température f en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement exprimé en heures.

La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle [0 ; +∞[par $f(t) = 30-10e^{-0,1t}$

1. Déterminer la température du lubrifiant :

a. A l'arrêt : $f(0) = 30-10e^{-0,1\times 0} = 30-10 = 20\,°\text{C}$.

b. Au bout de 24 heures : $f(24) = 30-10e^{-0,1\times 24} = 30-10e^{-2,4} \simeq 29{,}1\,°\text{C}$.

2. On s'intéresse au comportement de la fonction f en +∞.

a. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 30\,°\text{C}$.

b. Interprétation graphique : la courbe représentant la température admet une asymptote horizontale d'équation y = 30.

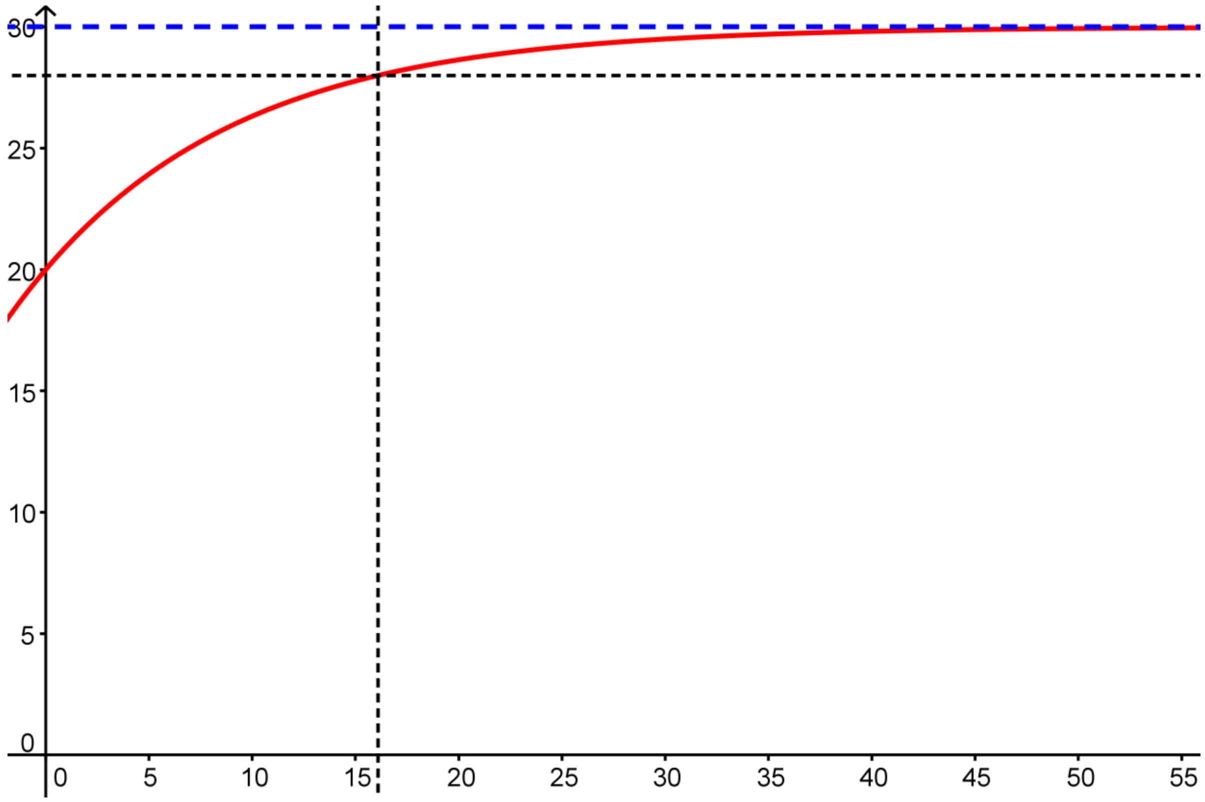
c. La température de ce lubrifiant va augmenter progressivement jusqu'à une valeur maximale de 30°C.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[: $f'(t) = -10\times(-0{,}1)e^{-0,1t} = e^{-0,1t}$

la fonction exponentielle étant strictement positive, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

b. Construire la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[dans le repère orthogonal (O ; I, J) donné ci-dessous.



4. A quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28°C ? Donner une valeur approchée à l'heure près puis à la minute près du résultat.

$$f(t)=28 \Leftrightarrow 30-10e^{-0,1t}=28 \Leftrightarrow 30-28=10e^{-0,1t} \Leftrightarrow \frac{2}{10}=e^{-0,1t} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{5}=-0,1t$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{5}=-\frac{1}{10}t \Leftrightarrow -10\ln\frac{1}{5}=t \Leftrightarrow t=10\ln 5 \simeq 16,094 \text{ heures}$$

$t=16\ h+0,094\ h=16\ h+0,094\times 60\ \text{min} \simeq 16\ h+6\ \text{min}$

5. Température moyenne du lubrifiant entre la cinquième et la dixième heure de fonctionnement :

$$T_{moy}=\frac{1}{10-5}\int_5^{10} f(t)\,dt=\frac{1}{5}\Big[30t+100e^{-0,1t}\Big]_5^{10}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(30\times 10+100e^{-0,1\times 10}\right)-\left(30\times 5+100e^{-0,1\times 5}\right)\right)=\frac{1}{5}\left(\left(300+100e^{-1}\right)-\left(150+100e^{-0,5}\right)\right)$$

$$=\left(60+20e^{-1}\right)-\left(30+20e^{-0,5}\right)=60+20e^{-1}-30-20e^{-0,5}$$

$$=30+20\left(e^{-1}-e^{-0,5}\right)\simeq 25,2\ °\text{C}.$$