AIRE D'UNE FONCTION

EXERCICES 4C.1

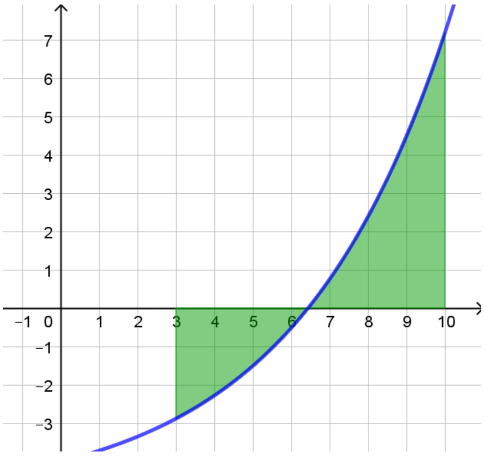
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x(x^2-x-12)$.

1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer (en unités d'aires) l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

EXERCICES 4C.2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{\frac{x}{4}}-5$.

1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer (en unités d'aires) l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=3$ et $x=10$.



EXERCICES 4C.1

1) *Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.*

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-12)=1+48=49=7^2 \qquad x_1=\frac{-(-1)-7}{2\times1}=-3 \text{ et } x_2=\frac{-(-1)+7}{2\times1}=4$$

Tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-x-12		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) *Calculer (en unités d'aires) l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.*

L'aire cherchée est donc :

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

Or $f(x)=x\left(x^2-x-12\right)=x^3-x^2-12x$, donc une primitive est :

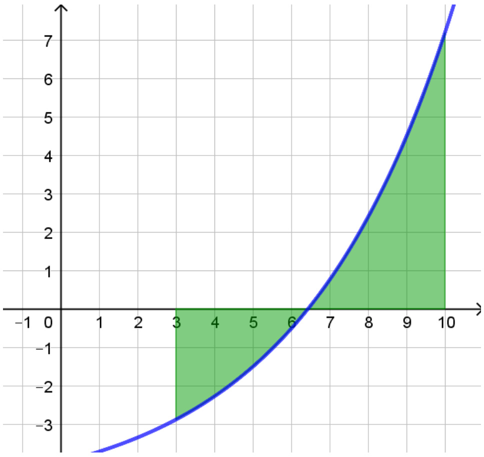
$$F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2$$

Ainsi : $$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=0-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}-6\times(-1)^2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}-6\times1^2\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-6\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-6\right)=-\frac{2}{4}+12=\frac{23}{2}$$

EXERCICES 4C.2



Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{\frac{x}{4}}-5$.

1) *Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.*

$$e^{\frac{x}{4}}-5>0 \iff e^{\frac{x}{4}}>5$$
$$\iff \frac{x}{4}>\ln 5$$
$$\iff x>4\ln 5$$

Si $x>4\ln5$: $f(x)>0$

Si $x<4\ln5$: $f(x)<0$.

2) *Calculer (en unités d'aires) l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=3$ et $x=10$.*

L'aire cherchée est :

$$-\int_{3}^{4\ln5} f(x)\,dx+\int_{4\ln5}^{10} f(x)\,dx=-\left[4e^{\frac{x}{4}}-5x\right]_{3}^{4\ln5}+\left[4e^{\frac{x}{4}}-5x\right]_{4\ln5}^{10}$$

$$=-\left(4e^{\frac{4\ln5}{4}}-5\times4\ln5\right)+\left(4e^{\frac{3}{4}}-5\times3\right)+\left(4e^{\frac{10}{4}}-5\times10\right)-\left(4e^{\frac{4\ln5}{4}}-5\times4\ln5\right)$$

$$=-4e^{\ln5}+20\ln5+4e^{\frac{3}{4}}-15+4e^{\frac{5}{2}}-50-4e^{\ln5}+20\ln5$$

$$= 40\ln 5 + 4e^{\frac{3}{4}} + 4e^{\frac{5}{2}} - 105$$
$$\simeq 16,57549241$$