

**ENCADREMENT D'INTEGRALES****EXERCICES 4D.1**

Comparer, sans les calculer les réels I et J :

$$I = \int_1^2 x e^x dx$$

$$J = \int_1^2 x^2 e^x dx.$$

**EXERCICES 4D.2**

Démontrer les encadrements suivants :

$$\text{a) } 2 \leq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \leq 4$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \leq 1$$

$$\text{c) } \sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3$$

$$\text{d) } 2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2$$

$$\text{e) } 2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5$$

**CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet**

**EXERCICES 4D.1**

Comparer, sans les calculer les réels  $I = \int_1^2 x e^x dx$  et  $J = \int_1^2 x^2 e^x dx$

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 2 \\ \Leftrightarrow x \leq x^2 \leq 2x \\ \Leftrightarrow x e^x \leq x^2 e^x \leq 2x e^x \\ \Leftrightarrow \int_1^2 x e^x dx \leq \int_1^2 x^2 e^x dx \leq \int_1^2 2x e^x dx \\ \Leftrightarrow I \leq J \end{aligned}$$



**EXERCICES 4D.2**

Démontrer les encadrements suivants : (même démarche que dans l'exercice 2)

**a)**  $2 \leq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \leq 4$

$$\begin{aligned} 1 \leq t \leq 9 &\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{t} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 1 + \sqrt{t} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+\sqrt{t}} \geq \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \int_1^9 \frac{1}{2} dt &\geq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \geq \int_1^9 \frac{1}{4} dt \Leftrightarrow \left[ \frac{t}{2} \right]_1^9 \geq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \geq \left[ \frac{t}{4} \right]_1^9 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} - \frac{1}{2} &\geq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \geq \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \geq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \geq 2 \end{aligned}$$

**b)**  $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \leq 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 1 &\Leftrightarrow 0^3 \leq t^3 \leq 1^3 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + t^3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{1+t^3} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 1 dt &\geq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{2} dt \Leftrightarrow [t]_0^1 \geq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \geq \left[ \frac{t}{2} \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**c)**  $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3$

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 2 &\Leftrightarrow 1^3 \leq x^3 \leq 2^3 \Leftrightarrow 2 \leq 1 + x^3 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{9} \\ \Leftrightarrow \int_1^2 \sqrt{2} dx &\leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq \int_1^2 3 dx \Leftrightarrow [\sqrt{2} \times x]_1^2 \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq [3x]_1^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}(2-1) &\leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3(2-1) \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3 \end{aligned}$$

**d)**  $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Leftrightarrow 0^2 \leq x^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow e^0 \leq e^{x^2} \leq e^4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{e^{x^2}} \geq \frac{1}{e^4} \\ \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{1}{2} dx &\geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \geq \int_0^2 \frac{1}{e^4} dx \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{2} x \right]_0^2 \geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \geq \left[ \frac{1}{e^4} x \right]_0^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2-0) &\geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \geq \frac{1}{e^4}(2-0) \Leftrightarrow 1 \geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \geq \frac{2}{e^4} \end{aligned}$$

$$\text{e) } 2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5$$

$$2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 2^2 \leq x^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow 3 \leq x^2 - 1 \leq 15 \Leftrightarrow \ln 3 \leq \ln(x^2 - 1) \leq \ln 15$$

$$\Leftrightarrow \int_2^4 \ln 3 dx \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq \int_2^4 \ln 15 dx \Leftrightarrow [\ln(3)x]_2^4 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq [\ln(15)x]_2^4$$

$$\Leftrightarrow 2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2\ln 15 \dots$$