Suites et intégrales

Exercice 5A.1 :

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 1+t^n \, dt$

1) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2) Est-elle convergente ?

Exercice 5A.2 :

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

1) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n}$.
2) La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice 5A.3 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \int_0^n f(t) dt$

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Prouver que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

   (*Indication* : on montrera que : $\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq \frac{x}{n+1}$.

Exercice 5A.4 : Centres étrangers juin 2012

On considère la suite (I_n) définie pour *n* entier naturel non nul par : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1) a) Soit *g* la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.

   Démontrer que la fonction *G* définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction *g*.

   b) En déduire la valeur de I_1.

   c) On admet que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$.

   Calculer I_3 et I_5.

2) On considère l'algorithme suivant :
   Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?
   Quelle est sa valeur ?

   Variables : n entier, u réel
   Entrées et initialisation
   $1 \to n$
   $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \to u$
   Traitement
   tant que $n < 21$ **faire**
   $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u \to u$
   $n+2 \to n$
   fin
   Sorties : Afficher u

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul *n*, $\mathrm{I}_n \geq 0$.

   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

   On note ℓ sa limite.

4) Déterminer la valeur de ℓ. On pourra raisonner par l'absurde.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 5.1 :

La suite (I_n) *est définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\mathrm{I}_n = \int_0^1 1+t^n\,dt$

1) *Prouver que la suite* (I_n) *est décroissante.*

$$\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n = \int_0^1 1+t^{n+1}\,dt - \int_0^1 1+t^n\,dt = \int_0^1 1+t^{n+1}-1-t^n\,dt = \int_0^1 t^{n+1}-t^n\,dt = \int_0^1 t^n(t-1)\,dt$$

Or sur l'intervalle $[0;1]$:

$0 \le t^n \le 1$ et $t-1 \le 0$.

Ainsi : $t^n(t-1) \le 0$

Et : $\int_0^1 t^n(t-1)\,dt \le 0$.

Ainsi $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n \le 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

2) *Est-elle convergente ?*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 1+t^n\,dt$$

Or sur l'intervalle $[0;1]$:

$1+t^n \ge 0$

Ainsi :

$$\int_0^1 1+t^n\,dt \ge 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n \ge 0$$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Exercice 5.2 :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

1) *Démontrer que* $\frac{1}{n+1} \le \mathrm{I}_n \le \frac{1}{n}$.

Or sur l'intervalle $[n;n+1]$:

$$0 < n \le x \le n+1 \iff \frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

Ainsi : $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx$

$$\iff \left[\frac{1}{n+1}\times x\right]_n^{n+1} \le \mathrm{I}_n \le \left[\frac{1}{n}\times x\right]_n^{n+1}$$

$$\iff \frac{1}{n+1}(n+1-n) \le \mathrm{I}_n \le \frac{1}{n}(n+1-n)$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \le \mathrm{I}_n \le \frac{1}{n}$$

2) *La suite* (I_n) *est-elle convergente ?*

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 5.3 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

La suite (u_n) *est définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_n=\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$

1) *Démontrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{n+1} f(t)\,dt-\int_0^n f(t)\,dt=\int_0^{n+1} f(t)\,dt+\int_n^0 f(t)\,dt=\int_n^{n+1} f(t)\,dt\,.$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}^+ : \dfrac{x}{x+1}\geq 0$.

Donc $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt\geq 0$ et $u_{n+1}-u_n\geq 0$: la suite (u_n) est croissante.

2) *Prouver que pour tout entier* $n\geq 1$, $u_n\geq\dfrac{n-1}{2}$. *La suite* (u_n) *converge-t-elle ?*

La relation $u_n=\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ implique :

$$0\leq x\leq n \iff 1\leq x+1\leq n+1 \iff 1\geq\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{n+1} \iff \frac{x}{x+1}\geq\frac{x}{n+1} \iff f(x)\geq\frac{x}{n+1}\,.$$

En intégrant l'inégalité, on trouve :

$$\int_0^n f(t)\,dt\geq\int_0^n\frac{x}{n+1}dx \iff u_n\geq\left[\frac{1}{n+1}\times\frac{x^2}{2}\right]_0^n \iff u_n\geq\frac{1}{n+1}\left(\frac{n^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) \iff u_n\geq\frac{n^2}{2(n+1)}$$

Or $n^2\geq n^2-1$ donc :

$$u_n\geq\frac{n^2-1}{2(n+1)} \iff u_n\geq\frac{(n+1)(n-1)}{2(n+1)} \iff u_n\geq\frac{n-1}{2}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2}=+\infty$$

Donc par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

Exercice 5.4 : Centres étrangers juin 2012

On considère la suite (I_n) *définie pour n entier naturel non nul par :* $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2}dx$.

1) *a) Soit g la fonction définie par* $g(x)=xe^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ *par* $G(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction g.*

La fonction G est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielle et polynômiale.

$$\forall x\in\mathbb{R} :\quad G'(x)=\frac{1}{2}\times 2x\times e^{x^2}=x\times e^{x^2}=g(x)\,.$$

Donc G est une primitive de g.

b) *En déduire la valeur de* I_1.

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx$$

On pose $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$. Ainsi :

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{u(x)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{e-1}{2}.$$

c) *On admet que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$.*

Calculer I_3 et I_5.

$$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_{1+2} = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2}\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}e - \frac{2}{2}\times\frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{I}_5 = \mathrm{I}_{3+2} = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2}\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}e - \frac{4}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e - 1 = \frac{e-2}{2}.$$

2) *On considère l'algorithme suivant :*

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

Quelle est sa valeur ?

Variables : n entier, u réel
Entrées et initialisation
$1 \to n$
$\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \to u$
Traitement
tant que $n < 21$ **faire**
$\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u \to u$
$n + 2 \to n$
fin
Sorties : Afficher u

Au départ, $n=1$ et u est initialisé avec la valeur I_1.

A chaque boucle, n augmente de 2 et on calcule le I_n associé.

Lorsque l'on a calculé I_{19} et augmenté n de 2 (il vaut alors 19),

on effectue une dernière boucle et on calcule I_{21}.

3) a) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{I}_n \geq 0$.*

$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx$ or sur l'intervalle $[0;1]$:

$$0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^n \leq 1 \iff 0 \leq x^n e^{x^2} \leq 1$$

Donc cette fonction est positive et $\mathrm{I}_n \geq 0$.

b) *Montrer que la suite (I_n) est décroissante.*

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2}\, dx - \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx \\ &= \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} - x^n e^{x^2}\, dx \\ &= \int_0^1 x^n e^{x^2}(x-1)\, dx\end{aligned}$$

Or $\forall x \in [0;1]$: $x - 1 < 0 \iff x^n e^{x^2}(x-1) < 0$.

Ainsi : $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leq 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

c) *En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.*

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente.

4) *Déterminer la valeur de ℓ. On pourra raisonner par l'absurde.*

La limite cherchée vérifie :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_{n+1}$$

En reportant cette information dans la relation $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$, on obtient :

$$\ell = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} \times \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell + \frac{n+1}{2} \times \ell = \frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+3}{2} \times \ell = \frac{1}{2}e$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{1}{2}e \times \frac{2}{n+3} = \frac{e}{n+3} \quad \text{or } \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+3} = 0 \quad \text{donc : } \ell = 0.$$