Problèmes sur les suites et intégrales

Exercice 5B.1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{4\ln(x+5)}{x+5}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

   a) Montrer que si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

   b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=(\ln(x+5))^2$.

   a) Justifier la dérivabilité sur $[0;+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

   b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$. Calculer I_n.
4. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$.

   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 5B.2 :

On considère la suite (I_n) définie pour $n\geq 0$ par : $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$.

1) a- Déterminer le sens de variation de cette suite.

   b- Montrer que (I_n) est une suite positive.

   c- Montrer que, pour tout $t\in[0;1]$, on a : $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n}\leq\dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$.

   Que peut-on en conclure ?

2) On considère deux fonctions *f* et *g* définies sur $[0;1]$ par :

$$f(x)=e^{-x}+x-1 \quad \text{et} \quad g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}.$$

   a- Etudier le sens de variation et le signe de *f*.

   b- En déduire le sens de variation de *g* sur $[0;1]$.

   c- Etablir, pour tout *x* appartenant à $[0;1]$, l'encadrement : $1-x\leq e^{-x}\leq 1-x+\dfrac{x^2}{2}$.

   d- En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout $t\in[0;1]$.

   e- Etablir l'encadrement : $\dfrac{2}{3(n+2)}\leq I_n\leq\dfrac{23}{30(n+1)}$.

   f- Donner une valeur de *p* telle que $I_p\leq 10^{-2}$.

Exercice 5B.3 :

L'objectif est d'étudier la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

On pose pour tout entier naturel *n* et pour tout réel *x* :

$$f_n(x) = (1-x)^n \times e^x.$$

1. Vérifier que $f'_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - (n+1)f_n(x)$.
2. En déduire que $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - (n+1)\int_0^1 f_n(x)\,dx = -1$.
3. A l'aide de ce qui précède, démontrer que, pour tout entier naturel *n*,
   $$u_n = e - \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$
4. Démontrer que, pour tout entier naturel *n* et tout réel $x \in [0;1]$, la relation :
   $$0 \le f_n(x) \le e^x$$
   et en déduire un encadrement de $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
5. Quelle est la limite de la suite *u* ? Justifier.

il s'agit d'établir que $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 5B.4 :

On considère la suite de terme général $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

b) Montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$.

CORRIGE – Notre Dame de la Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 5B.1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{4\ln(x+5)}{x+5}$.

1. *Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.*

La fonction $x\mapsto x+5$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et prend ses valeurs dans $[5;+\infty[$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ or $[5;+\infty[\subset[0;+\infty[$ donc par composition la fonction $x\mapsto\ln(x+5)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$.

$$\forall x\in[0;+\infty[\ :\ f'(x)=\frac{4\times\frac{1}{x+5}\times(x+5)-4\ln(x+5)\times1}{(x+5)^2}=\frac{4-4\ln(x+5)}{(x+5)^2}=\frac{4(1-\ln(x+5))}{(x+5)^2}$$

$$\forall x\in[0;+\infty[\ :\ f'(x)>0\ \Leftrightarrow\ 1-\ln(x+5)>0\ \Leftrightarrow\ -\ln(x+5)>-1\ \Leftrightarrow\ \ln(x+5)<1$$
$$\Leftrightarrow\ x+5<e^1\ \Leftrightarrow\ x<e-5$$

Or $e-5<0$ donc $\forall x\in[0;+\infty[\ :\ f'(x)<0$.

On pose $X=x+5$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln(x+5)}{x+5}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{4\ln(X)}{X}=0$ et $f(0)=\dfrac{4\ln(0+5)}{0+5}=\dfrac{4\ln5}{5}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\dfrac{4\ln5}{5}$	$\searrow$	0

2. *On définit la suite $(u_n)_{n\geq0}$ par son terme général $u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.*

a) *Montrer que si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.*

Soit n un entier quelconque positif : la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[n;n+1]$.

Donc $f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)$ soit $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

b) *Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.*

En intégrant la relation précédente, on obtient :

$$\int_n^{n+1}f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq\int_n^{n+1}f(n)dx$$
$$\Leftrightarrow\ \left[f(n+1)\times x\right]_n^{n+1}\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq\left[f(n)\times x\right]_n^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow\ f(n+1)\times(n+1-n)\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq f(n)\times(n+1-n)$$
$$\Leftrightarrow\ f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$$

c) *En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.*

On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(n+1)=0$.

Par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=0$.

3. *Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=(\ln(x+5))^2$.*

a) *Justifier la dérivabilité sur $[0;+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.*

La fonction $x\mapsto \ln(x+5)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction F est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables .

$$\forall x\in[0;+\infty[\ :\ F'(x)=2(\ln(x+5))\times\frac{1}{x+5}=2\times\frac{\ln(x+5)}{x+5}=\frac{1}{2}f(x)$$

b) *On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n.*

Soit n un entier quelconque positif : $F'(x)=\frac{1}{2}f(x)$ donc $2F$ est une primitive de la fonction f

Ainsi :
$$I_n=\int_0^n f(x)dx=[2F(x)]_0^n=2(F(n)-F(0))$$
$$=2\left[(\ln(n+5))^2-(\ln(0+5))^2\right]$$
$$=2\left[(\ln(n+5))^2-(\ln 5)^2\right]=2(\ln^2(n+5)-\ln^2 5)$$

4. *On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.*

Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Soit n un entier quelconque positif :

$$S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+...+\int_{n-1}^n f(x)dx=\int_0^n f(x)dx=I_n$$

Pour tout entier n strictement positif :

$$S_n=I_n=2\left[(\ln(n+5))^2-(\ln 5)^2\right].$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+5)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(n+5))^2=+\infty$.

Par différence : $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left[(\ln(n+5))^2-(\ln 5)^2\right]=+\infty$: la suite (S_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

Exercice 5B.2 :

On considère la suite (I_n) définie pour $n\geq 0$ par : $I_n=\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{1+n+t}dt$.

1) **a-** *Déterminer le sens de variation de cette suite.*

Calculons
$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{1+(n+1)+t}dt-\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{1+n+t}dt=\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{n+2+t}-\frac{e^{-t^2}}{1+n+t}dt$$
$$=\int_0^1\frac{e^{-t^2}\left[(1+n+t)-(n+2+t)\right]}{(n+2+t)\times(1+n+t)}dt=\int_0^1\frac{e^{-t^2}\times(-1)}{(n+2+t)\times(1+n+t)}dt$$
$$=-\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{(n+2+t)\times(1+n+t)}dt$$

Tous les termes de l'intégrale sont positifs donc l'intégrale est positive.

Donc $I_{n+1}-I_n<0$ et la suite (I_n) est décroissante. $\int_3^5 x^2\,dx>0$, $\int_5^3 x^2\,dx<0$

b- *Montrer que (I_n) est une suite positive.*

L'intégrale d'une fonction positive est positive et $0<1$ donc (I_n) est une suite positive.

c- *Montrer que, pour tout $t\in[0;1]$, on a : $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n}\le\dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$.*

Que peut-on en conclure ? NB : $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n}=e^{-t^2}\times\dfrac{1}{1+t+n}$

$0\le t\le 1$ donc $0\le t^2\le 1$ et $0\ge -t^2\ge -1$ donc $e^0\ge e^{-t^2}\ge e^{-1}$ soit $e^{-1}\le e^{-t^2}\le 1$.

D'autre part :

$0\le t\le 1$ donc $n+1\le n+1+t\le n+2$ d'où : $\dfrac{1}{n+1}\ge\dfrac{1}{n+1+t}\ge\dfrac{1}{n+2}$

Ainsi : $0<e^{-t^2}\le 1$ et $0<\dfrac{1}{n+1+t}\le\dfrac{1}{n+1}$ ainsi par produit :

$$e^{-t^2}\times\frac{1}{1+t+n}\le 1\times\frac{1}{1+n}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{e^{-t^2}}{1+t+n}\le\frac{1}{1+n}.$$

Par intégration : $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{1+n+t}dt\le\int_0^1\frac{1}{1+n}dt$

Soit $\quad I_n\le\left[\dfrac{1}{1+n}\times t\right]_0^1$

$I_n\le\dfrac{1}{1+n}$

La suite (I_n) est décroissante et minorée : elle converge.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+n}=0$ or (I_n) est une suite positive donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

2) *On considère deux fonctions f et g définies sur $[0;1]$ par :*

$$f(x)=e^{-x}+x-1\quad\text{et}\quad g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}.$$

a- *Etudier le sens de variation et le signe de f.*

f est dérivable comme somme et composée de fonctions exponentielle et polynomiales.

$\forall x\in[0;1]$: $f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)>0\ \Leftrightarrow\ -e^{-x}+1>0\ \Leftrightarrow\ 1>e^{-x}\ \Leftrightarrow\ \ln 1>-x\ \Leftrightarrow\ 0<x$.

Donc *f* est croissante sur $[0;1]$ avec $f(0)=e^{-0}+0-1=0$; ainsi $\forall x\in[0;1]$: $f(x)\ge 0$

b- *En déduire le sens de variation de g sur $[0;1]$.*

g est dérivable comme somme et composée de fonctions exponentielle et polynomiales.

$\forall x\in[0;1]$: $g'(x)=-1+x+e^{-x}=f(x)$

$\forall x\in[0;1]$: $f(x)\ge 0$ et $g'(x)\ge 0$: la fonction *g* est croissante sur $[0;1]$.

Or $g(0)=1-0+\dfrac{0^2}{2}-e^{-0}=0$: la fonction g est positive sur $[0;1]$.

c- *Etablir, pour tout x appartenant à $[0;1]$, l'encadrement : $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\dfrac{x^2}{2}$.*

$\forall x\in[0;1]$: $f(x)>0$ donc $e^{-x}+x-1>0\ \Leftrightarrow\ e^{-x}>-x+1\ \Leftrightarrow\ 1-x<e^{-x}$.

$\forall x\in[0;1]$: $g(x)>0$ donc $1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}>0\ \Leftrightarrow\ 1-x+\dfrac{x^2}{2}>e^{-x}$.

Ainsi $\forall x \in [0;1] : 1-x \le e^{-x} \le 1-x+\dfrac{x^2}{2}$

d- *En déduire un encadrement de* e^{-t^2} *pour tout* $t \in [0;1]$.

En posant $x = t^2$, on obtient : $\forall t \in [0;1] : 1-t^2 \le e^{-t^2} \le 1-t^2+\dfrac{t^4}{2}$.

e- *Etablir l'encadrement :* $\dfrac{2}{3(n+2)} \le I_n \le \dfrac{23}{30(n+1)}$.

La fonction $t \mapsto 1+n+t$ étant positive pour tout $\forall t \in [0;1]$, on obtient :

$$\frac{1-t^2}{1+n+t} \le \frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \le \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n+t}$$

Puis en intégrant sur l'intervalle $[0;1]$:

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+n+t}dt \le \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}dt \le \int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n+t}dt$$

Or $t \in [0;1]$ donc $1+n+t \le n+2 \iff \dfrac{1}{1+n+t} \ge \dfrac{1}{n+2} \iff \dfrac{1}{n+2} \le \dfrac{1}{1+n+t}$

D'où : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{n+2}dt = \left[\frac{t-\frac{t^3}{3}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{\frac{2}{3}}{n+2} = \frac{2}{3(n+2)}$ ainsi : $\displaystyle\frac{2}{3(n+2)} \le \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+n+t}dt$

Et $t \in [0;1]$ donc $1+n+t \ge n+1 \iff \dfrac{1}{1+n+t} \le \dfrac{1}{n+1}$

D'où : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{n+1}dt = \left[\frac{t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\frac{30-10+3}{30}}{n+1} = \frac{\frac{23}{30}}{n+1} = \frac{23}{30(n+1)}$

Ainsi : $\dfrac{2}{3(n+2)} \le I_n \le \dfrac{23}{30(n+1)}$

f- *Donner une valeur de p telle que* $I_p \le 10^{-2}$.

$I_p \le 10^{-2} \iff \dfrac{23}{30(p+1)} \le 10^{-2} \iff \dfrac{23}{30\times 10^{-2}} \le p+1 \iff p > \dfrac{230}{3}-1$

soit $p \ge 76$

Exercice 5B.3 :

L'objectif est d'étudier la suite u définie par $u_0 = 1$ *et, pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$f_n(x) = (1-x)^n \times e^x.$$

1. *Vérifier que* $f'_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - (n+1) f_n(x)$.

Pour tout réel x : $f_{n+1}(x)=(1-x)^{n+1}\times e^{x}$, fonction dérivable en tant que produit de fonctions polynômiale et exponentielle :

$$f_{n+1}^{'}(x)=(n+1)(1-x)^{n}\times(-1)\times e^{x}+(1-x)^{n+1}\times e^{x}$$
$$= f_{n+1}(x)-(n+1)\,f_n(x)$$

2. *En déduire que* $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx-(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx=-1$.

La relation :

$$f_{n+1}(x)-(n+1)\,f_n(x)=f_{n+1}^{'}(x)$$

donne :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)dx-(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f_{n+1}^{'}(x)dx$$
$$\Leftrightarrow\ \int_0^1 f_{n+1}(x)dx-(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx=\left[f_{n+1}(x)\right]_0^1$$
$$\Leftrightarrow\ \int_0^1 f_{n+1}(x)dx-(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx=\left[(1-x)^{n+1}\times e^{x}\right]_0^1$$
$$\Leftrightarrow\ \int_0^1 f_{n+1}(x)dx-(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx=(1-1)^{n+1}\times e^{1}-(1-0)^{n+1}\times e^{0}$$
$$\Leftrightarrow\ \int_0^1 f_{n+1}(x)dx-(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx=-1$$

3. *A l'aide de ce qui précède, démontrer que, pour tout entier naturel n,* $u_n=e-\dfrac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)dx$.

On sait que …………….

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout réel $x\in[0;1]$, la relation :

$$0\le f_n(x)\le e^{x}$$

et en déduire un encadrement de $\int_0^1 f_n(x)dx$.

5. Quelle est la limite de la suite u ? Justifier.

il s'agit d'établir que $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

Exercice 5B.4 :

On considère la suite de terme général $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}$

a) *Pour* $k\in\mathbb{N}^*$, *comparez* $\dfrac{1}{k}$ *avec* $\int_k^{k+1}\dfrac{dt}{t}$ *et* $\int_{k-1}^{k}\dfrac{dt}{t}$.

Graphiquement, on obtient :

$$\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\le\frac{1}{k}\quad\text{et}\quad\frac{1}{k}\le\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}\le\frac{1}{k-1}$$

Donc : $\int_k^{k+1}\dfrac{dt}{t}\le\dfrac{1}{k}\le\int_{k-1}^{k}\dfrac{dt}{t}$

Soit : $\int_2^3\dfrac{dt}{t}\le\dfrac{1}{2}\le\int_1^2\dfrac{dt}{t}$, $\int_3^4\dfrac{dt}{t}\le\dfrac{1}{3}\le\int_2^3\dfrac{dt}{t}$, … , $\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t}\le\dfrac{1}{n}\le\int_{n-1}^{n}\dfrac{dt}{t}$

b) *Montrez que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\ln n}=1$.

Ainsi :

$$\int_2^{n+1}\frac{dt}{t}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le\int_1^{n}\frac{dt}{t}$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n+1)-\ln 2\le\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le\ln(n)-\ln 1$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n+1)-\ln 2\le S_n\le\ln(n)$$

On remarque que :

$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n+1)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n+1)\le 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n+1)-1\le\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

Ainsi :

$$\ln(n+1)-1\le S_n\le\ln(n)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\ln(n+1)-1}{\ln(n)}\le\frac{S_n}{\ln(n)}\le\frac{\ln(n)}{\ln(n)}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n)}\le\frac{S_n}{\ln(n)}\le 1$$

Or : $\quad n+1=n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n+1)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Or : $\quad \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$

Donc : $\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n)}=1$

Et par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln n}=1$$