L'intégration par parties : $\int u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right] - \int u'(x)v(x)\,dx$

Exercice 7A.1 : Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.

1. $f(x) = x^2 e^x$
2. $f(x) = x\cos(x)$
3. $f(x) = x\ln(x)$
4. $f(x) = 4x^3\ln(x)$

Exercice 7A.2 : Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$

Exercice 7A.3 : Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.

1. $f(x) = xe^{-2x}$
2. $f(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$
3. $f(x) = (x+3)\ln(x+3)$

Exercice 7A.4 : Déterminer, à l'aide d'une double IPP tournante, une primitive de la fonction

$$f(x) = e^x.\cos x$$

Exercice 7A.5 : Déterminer, à l'aide d'une IPP (ou d'une autre méthode), une primitive de la fonction

$$f(x) = \sin x.\cos x$$

Exercice 7A.6 : Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive de la fonction $f(x) = x^n e^x$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 7A.1 : *Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.*

$f(x)=x^2e^x$ →on pose $u(x)=x^2$ et $v'(x)=e^x$

→on obtient : $u'(x)=2x$ et $v(x)=e^x$

IPP : $\int x^2e^x = x^2e^x - \int 2xe^x$ mais cette dernière intégrale reste compliquée, d'où une 2ème IPP :

→on pose $u_2(x)=2x$ et $v_2'(x)=e^x$

→on obtient : $u_2'(x)=2$ et $v_2(x)=e^x$

$\int 2xe^x = 2xe^x - \int 2e^x = 2xe^x - 2\int e^x = 2xe^x - 2e^x$

On peut alors la première IPP :

$$\int x^2e^x = x^2e^x - \int 2xe^x = x^2e^x - \left(2xe^x - 2e^x\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x\left(x^2-2x+2\right)$$

$f(x)=x\cos(x)$ →on pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\cos x$

→on obtient : $u'(x)=1$ et $v(x)=\sin x$

IPP : $\int x\cos x = x\sin x - \int 1\times\sin x = x\sin x - (-\cos x) = x\sin x + \cos x$

$f(x)=x\ln(x)$ →on pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$

→on obtient : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$

IPP : $\int x\ln x = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int\dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$

$f(x)=4x^3\ln(x)$ →on pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=4x^3$

→on obtient : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x^4$

IPP : $\int 4x^3\ln x = x^4\ln x - \int x^4\times\dfrac{1}{x} = x^4\ln x - \int x^3 = x^4\ln x - \dfrac{x^4}{4}$

Exercice 7A.2 : *Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive de la fonction* $f(x)=\ln x$

→on pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$

→on obtient : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$

IPP : $\int \ln x = x\ln x - \int x\times\dfrac{1}{x} = x\ln x - \int 1 = x\ln x - x$

Exercice 7A.3 : *Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.*

$f(x)=xe^{-2x}$ →on pose $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{-2x}$

→on obtient : $u'(x)=1$ et $v(x)=\dfrac{e^{-2x}}{-2}=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

IPP : $\int xe^{-2x} = x\times\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int 1\times\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\dfrac{1}{2}xe^{-2x} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^{-2x}}{-2} = -\dfrac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)$

$f(x)=x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ → on pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

→ on obtient : $u'(x)=1$ et $v(x)=-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

IPP : $\int x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\int\left(-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)$

$$=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{3}\int\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

$$=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

$f(x)=(x+3)\ln(x+3)$ → on pose $u(x)=\ln(x+3)$ et $v'(x)=x+3$

→ on obtient : $u'(x)=\frac{1}{x+3}$ et $v(x)=\frac{1}{2}x^2+3x$

$$\int(x+3)\ln(x+3)=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\int\frac{1}{x+3}\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\int\frac{1}{x+3}\left(\frac{x^2+6x}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+3x+3x}{x+3}=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\frac{x(x+3)}{x+3}-\frac{3}{2}\int\frac{x}{x+3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int x-\frac{3}{2}\int\frac{x+3-3}{x+3}=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\int\frac{x+3}{x+3}-\frac{3}{2}\int\frac{-3}{x+3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\times x+\frac{9}{2}\int\frac{1}{x+3}=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\times\ln(x+3)-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\times x+\frac{9}{2}\times\ln|x+3|$$

Exercice 7A.4 : Déterminer, à l'aide d'une double IPP tournante, une primitive de la fonction

$$f(x)=e^x.\cos x$$

→ on pose $u(x)=\cos x$ et $v'(x)=e^x$

→ on obtient : $u'(x)=-\sin x$ et $v(x)=e^x$

IPP : $\int e^x.\cos x=e^x.\cos x-\int e^x(-\sin x)=e^x.\cos x+\int e^x\sin x$

2ème IPP : → on pose $u_2(x)=\sin x$ et $v_2'(x)=e^x$

→ on obtient : $u_2'(x)=\cos x$ et $v_2(x)=e^x$

$\int e^x\sin x=e^x\sin x-\int e^x\cos x$

Retour à la 1ère IPP : $\int e^x.\cos x=e^x\cos x+\int e^x\sin x=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x$

L'équation : $\int e^x.\cos x=e^x.\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x$ donne :

$$2\times\int e^x.\cos x=e^x\cos x+e^x\sin x$$

Ainsi : $\int e^x.\cos x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

Exercice 7A.5 :

Déterminer, à l'aide d'une IPP (ou d'une autre méthode), une primitive de la fonction $f(x) = \sin x.\cos x$

Avec une IPP :

→on pose $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \cos x$

→on obtient : $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$

$$\int \sin x.\cos x = \sin^2 x - \int \cos x \times \sin x \Leftrightarrow \int \sin x.\cos x + \int \cos x \times \sin x = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \int \cos x \times \sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \int \cos x \times \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int \cos x \times \sin x = \frac{1-\cos(2x)}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x)$$

NB : $f(x) = \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

Donc une primitive est : $F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$

Exercice 6: Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive de la fonction $f(x) = x^n e^x$

→on pose $u(x) = x^n$ et $v'(x) = e^x$

→on obtient : $u'(x) = n \times x^{n-1}$ et $v(x) = e^x$

IPP : $\int x^n e^x = x^n e^x - \int n \times x^{n-1} e^x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x$

De même : $\int x^{n-1} e^x = x^{n-1} e^x - (n-1) \int x^{n-2} e^x$

$\int x^{n-2} e^x = x^{n-2} e^x - (n-2) \int x^{n-3} e^x$

Jusqu'à $\int xe^x = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x$

AINSI :

$$\int x^n e^x = x^n e^x - n\left(x^{n-1}e^x - (n-1)\left(x^{n-2}e^x + ...\right)\right)$$

$$\int x^n e^x = e^x\left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + ... + (-1)^{n+1} \times n! \times x + (-1)^{n+1} \times n!\right]$$