EXERCICES 7B.1

1) a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale : $\int_1^x (2-t)\,dt$.

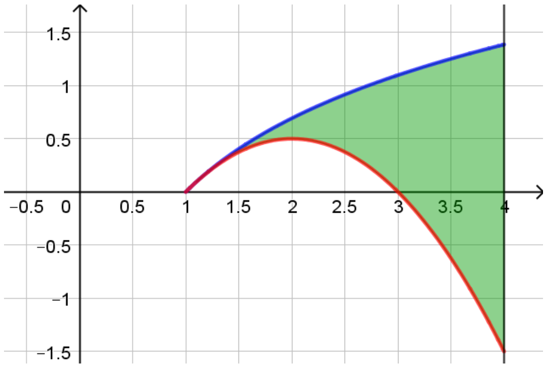
   b) Démontrer que pour tout réel $t \in [1;+\infty[$, on a : $2-t \leq \frac{1}{t}$.

   c) Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leq \ln x.$$

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$



   a) Démontrer que $\int_1^4 h(x)\,dx = 0$.

   b) Sur le graphique ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal dans lequel on a tracé la droite (d) d'équation $x=4$, et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1;4]$.

   Illustrer sur ce graphique le résultat de la question précédente.

   c) On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d), et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1;4]$.

   En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICES 7B.1

1) a) *Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale :* $\int_1^x (2-t)\,dt$.

$$\int_1^x (2-t)\,dt = \left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x = \left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)-\left(2\times 1-\frac{1}{2}\times 1^2\right) = -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

b) *Démontrer que pour tout réel $t\in[1;+\infty[$, on a : $2-t\leq\frac{1}{t}$.*

Pour tout $t\in[1;+\infty[$, on étudie le signe de $2-t-\frac{1}{t}$:

$$2-t-\frac{1}{t}=\frac{2t-t^2-1}{t}=\frac{-t^2+2t-1}{t}=\frac{-\left[t^2-2t+1\right]}{t}=\frac{-(t-1)^2}{t}\leq 0$$

Donc pour tout $t\in[1;+\infty[$, $\quad 2-t-\frac{1}{t}\leq 0 \iff 2-t\leq\frac{1}{t}$.

c) Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\leq \ln x.$$

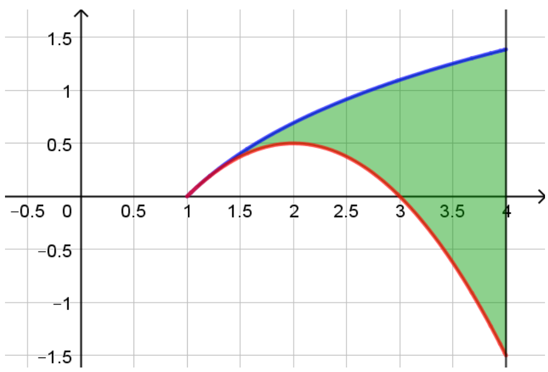
D'après ce qui précède :

$$\int_1^x (2-t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

soit : $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\leq \ln x$

2) *Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$



a) *Démontrer que* $\int_1^4 h(x)\,dx=0$.

$$\int_1^4\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{3}{2}x\right]_1^4$$

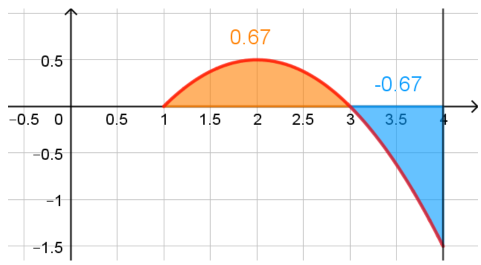
$$=\left(-\frac{1}{6}\times 4^3+4^2-\frac{3}{2}\times 4\right)-\left(-\frac{1}{6}\times 1^3+1^2-\frac{3}{2}\times 1\right)$$

$$=\left(-\frac{64}{6}+16-6\right)-\left(-\frac{1}{6}+1-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{64}{6}+10+\frac{1}{6}-1+\frac{3}{2}=-\frac{63}{6}+\frac{18}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{21}{2}+\frac{18}{2}+\frac{3}{2}=0$$

b) *Sur le graphique ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal dans lequel on a tracé la droite (d) d'équation $x=4$, et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1;4]$.Illustrer sur ce graphique le résultat de la question précédente.*

La fonction h (polynôme de degré 2) est positive sur $[1;3]$ et négative sur $[3;4]$.



Le résultat précédent traduit que l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$ est la même que celle de la partie du plan délimitée par la courbe de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=3$ et $x=4$.

c) *On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d), et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1;4]$.*

En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

D'après ce qui précède, l'aire cherchée est :

$$\int_1^4 (\ln(x)-h(x))\,dx = \int_1^4 (\ln(x))\,dx - \int_1^4 (h(x))\,dx = \int_1^4 (\ln(x))\,dx$$

On pose $u(x)=\ln(x)$ et $v'(x)=1$, d'où : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$

Ainsi, avec une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^4 (\ln(x))\,dx &= \int_1^4 (u(x)\times v'(x))\,dx\\ &= [u(x)\times v(x)]_1^4 - \int_1^4 (u'(x)\times v(x))\,dx\\ &= [x\ln x]_1^4 - \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\times x\right)dx\\ &= 4\ln 4 - [x]_1^4\\ &= 4\ln 4 - (4-1) = 4\ln 4 - 3\end{aligned}$$