Intégrales avec changements de variables – F. Quet

Exercice 8A.1

1) A l'aide d'une intégration par parties, retrouver la valeur de $\int_a^b \ln(x)\,dx$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.
2) A l'aide d'un changement de variable, déterminer $\int_0^1 \ln(3x+1)\,dx$.

Exercice 8A.2

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^1 \frac{u^2-3u+1}{\sqrt{2u+3}}\,du$.

Exercice 8A.3

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$ puis $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^3}\,dx$

Exercice 8A.4

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx$.

Exercice 8A.5

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dt$.

Exercice 8A.6

A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t}$, calculer $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+2t}\,dt$.

Exercice 8A.7

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^x \left(3t^2+2t\right)e^{t^3+t^2}\,dt$.

Exercice 8A.8

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_e^{e^3} \frac{\pi}{x\ln x}\,dx$.

Exercice 8A.9

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_1^x \frac{2^{\ln t}}{t}\,dt$.

Exercice 8A.10

Calculer $\int_4^5 \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}\,dx$.

Exercice 8A.1

1) *A l'aide d'une intégration par parties, retrouver la valeur de* $\int_a^b \ln(x)\,dx$ *, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.*

2) *A l'aide d'un changement de variable affine, déterminer* $\int_0^1 \ln(3x+1)\,dx$.

1) On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$

Ainsi : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$.

On obtient :

$$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x-\int_0^1 \frac{1}{x}\times x dx = x\ln x-\int_0^1 1dx = x\ln x - x.$$

2) On pose $t=3x+1$, donc : $x=\dfrac{t-1}{3}$.

D'autre part : $\dfrac{dt}{dx}=3 \Leftrightarrow dt=3dx \Leftrightarrow dx=\dfrac{dt}{3}$.

Pour $x=0$: $t=1$

Pour $x=1$: $t=3\times 1+1=4$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(3x+1)\,dx &= \int_1^4 \ln(t)\frac{dt}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left[t\ln(t)-t\right]_1^4\\ &= \frac{1}{3}\left[(4\ln(4)-4)-(1\ln(1)-1)\right]\\ &= \frac{1}{3}(4\ln(4)-3)\\ &= \frac{4}{3}\ln(4)-1\end{aligned}$$

Exercice 8A.2

A l'aide d'un changement de variable affine, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2-3u+1}{\sqrt{2u+3}}\,du$.

On pose $x=\sqrt{2u+3}$, donc : $x^2=2u+3 \Leftrightarrow 2u=x^2-3 \Leftrightarrow u=\dfrac{x^2-3}{2}$

Ainsi : $\dfrac{du}{dx}=x \Leftrightarrow du=xdx$

Pour $u=0$: $x=\sqrt{2\times 0+3}=\sqrt{3}$

Pour $u=1$: $x=\sqrt{2\times 1+3}=\sqrt{5}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u^2-3u+1}{\sqrt{2u+3}}\,du &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{\left(\frac{x^2-3}{2}\right)^2-3\left(\frac{x^2-3}{2}\right)+1}{x}\times xdx\\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{x^2-3}{2}\right)^2-3\left(\frac{x^2-3}{2}\right)+1\right]dx\end{aligned}$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \left[\frac{x^4 - 6x^2 + 9}{4} - \left(\frac{6x^2 - 18}{4} \right) + \frac{4}{4} \right] dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \left[\frac{x^4 - 12x^2 + 31}{4} \right] dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{4} \left(x^4 - 12x^2 + 31 \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^5}{5} - 12 \frac{x^3}{3} + 31x \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5} - 4\left(\sqrt{5}\right)^3 + 31\sqrt{5} \right) - \left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{5} - 4\left(\sqrt{3}\right)^3 + 31\sqrt{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - 4 \times 5\sqrt{5} + 31\sqrt{5} \right) - \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - 4 \times 3\sqrt{3} + 31\sqrt{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(5\sqrt{5} - 20\sqrt{5} + 31\sqrt{5} \right) - \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - 12\sqrt{3} + 31\sqrt{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[16\sqrt{5} - \frac{104}{5}\sqrt{3} \right]$$

$$= 4\sqrt{5} - \frac{26}{5}\sqrt{3}$$

Exercice 8A.3

A l'aide d'un changement de variable affine, calculer $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^3} dx$.

On pose $t = x + 1$, donc : $x = t - 1$

D'autre part : $\frac{dt}{dx} = 1 \Leftrightarrow dt = dx$

Pour $x = 0$: $t = 1$

Pour $x = 1$: $t = 1 + 1 = 2$

Ainsi : $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^3} dx = \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^3} dt$

$$= \int_1^2 \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^3} dt$$

$$= \int_1^2 1 - \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2} - \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \left[t - 3\ln t - \frac{3}{t} + \frac{1}{2t^2} \right]_1^2$$

$$= \left(2 - 3\ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \times 2^2} \right) - \left(1 - 3\ln 1 - \frac{3}{1} + \frac{1}{2 \times 1^2} \right)$$

$$= 2 - 3\ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - 1 + 3 - \frac{1}{2} = \frac{17}{8} - 3\ln 2$$

A l'aide d'un changement de variable affine, calculer $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^3}dx$:

On pose $t=x-1$, donc : $x=t+1$

D'autre part : $\frac{dt}{dx}=1 \Leftrightarrow dt=dx$

Pour $x=2$: $t=1$

Pour $x=3$: $t=3-1=2$

Ainsi : $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^3}dx=\int_2^3 \frac{t+1}{t^3}dt=\int_2^3 \frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}dt=\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2}\right]_2^3$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{36}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{72}=\frac{12}{72}+\frac{5}{72}=\frac{17}{72}$$

Exercice 8A.4

A l'aide du changement de variable $t=e^x-1$, *calculer* $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$.

On pose $t=e^x-1$, donc : $e^x=t+1$

D'autre part : $\frac{dt}{dx}=e^x \Leftrightarrow dt=e^x dx \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t+1}$

Pour $x=1$: $t=e^1-1=e-1$

Pour $x=2$: $t=e^2-1$

Ainsi :

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx=\int_{e-1}^{e^2-1}\frac{(t+1)^2}{t}\times\frac{dt}{t+1}$$

$$=\int_{e-1}^{e^2-1}\frac{t+1}{t}dt$$

$$=\int_{e-1}^{e^2-1}1+\frac{1}{t}dt$$

$$=[t+\ln t]_{e-1}^{e^2-1}$$

$$=\left(e^2-1+\ln\left(e^2-1\right)\right)-\left(e-1+\ln(e-1)\right)$$

$$=e^2-e+\ln\left(e^2-1\right)-\ln(e-1)$$

$$=e^2-e+\ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)$$

$$=e(e-1)+\ln(e+1)$$

Exercice 8A.5

A l'aide du changement de variable $u(t)=e^t+1$, *calculer* $\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt$.

On pose $u(t)=e^t+1$, donc : $e^t=u(t)-1$

D'autre part : $u'(t)=\frac{du}{dt} \Leftrightarrow du=u'(t)\times dt \Leftrightarrow du=e^t\times dt \Leftrightarrow dt=\frac{du}{e^t}=\frac{du}{u(t)-1}$

Pour $t=0$: $u(0)=e^0+1=2$

Pour $t=1$: $u(1)=e^1+1=1+e$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt &= \int_2^{1+e} \frac{1}{u(t)} \times \frac{du}{u(t)-1} \\
&= \int_2^{1+e} \frac{1}{u(t)\left[u(t)-1\right]} du \\
&= \int_2^{1+e} \frac{1}{u(t)-1} - \frac{1}{u(t)} du \\
&= \left[\ln\left|u(t)-1\right| - \ln\left|u(t)\right|\right]_2^{1+e} \\
&= \left[\ln\left(u(t)-1\right) - \ln\left(u(t)\right)\right]_2^{1+e} \\
&= \left(\ln(1+e-1)-\ln(1+e)\right)-\left(\ln(2-1)-\ln(2)\right) \\
&= 1-\ln(1+e)+\ln 2
\end{aligned}$$

Exercice 8A.6

A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t}$ *, calculer* $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+2t}dt$.

On pose $u=\sqrt{t}$, donc : $t=u^2$

D'autre part : $u=\sqrt{t} \Leftrightarrow \frac{du}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow du=\frac{dt}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow dt=2\sqrt{t}du=2u\times du$

Pour $t=1$: $u=\sqrt{1}=1$

Pour $t=2$: $u=\sqrt{2}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+2t}dt &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u+2u^2}\times 2u\, du \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{1+2u} du \\
&= \left[\ln(1+2u)\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \ln\left(1+2\sqrt{2}\right)-\ln 3
\end{aligned}$$

Exercice 8A.7

A l'aide d'un changement de variable affine, calculer $\int_0^x \left(3t^2+2t\right)e^{t^3+t^2}dt$.

On pose $u=t^3+t^2$, donc : $\frac{du}{dt}=3t^2+2t$, d'où : $du=\left(3t^2+2t\right)dt$

→si $t=0$: $u=0^3+0^2=0$

→si $t=x$: $u=x^3+x^2$

Ainsi : $\int_0^x \left(3t^2+2t\right)e^{t^3+t^2}dx = \int_0^{x^3+x^2} e^u du = \left[e^u\right]_0^{x^3+x^2} = e^{x^3+x^2}-1$

Exercice 8A.8

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_e^{e^3} \frac{\pi}{x\ln x}dx$.

On pose $u = \ln x$, donc : $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, d'où : $du = \frac{dx}{x}$.

→si $t = e$: $u = \ln e = 1$

→si $t = e^3$: $u = \ln e^3 = 3$

Ainsi : $$\int_e^{e^3} \frac{\pi}{x\ln x}dx = \int_e^{e^3} \frac{\pi}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int_e^{e^3} \frac{\pi}{u}\times du = \left[\pi \times \ln|u|\right]_1^3 = \pi\times\ln 3$$

Exercice 8A.9

A l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_1^x \frac{2^{\ln t}}{t}dt$.

On pose $u = \ln t$, donc : $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$, d'où : $du = \frac{dt}{t}$.

→si $t = 1$: $u = \ln 1 = 0$

→si $t = x$: $u = \ln x$

Ainsi : $$\int_1^x \frac{2^{\ln t}}{t}dt = \int_1^x 2^{\ln t}\frac{dt}{t} = \int_1^{\ln x} 2^u du = \int_1^{\ln x} e^{u\times\ln 2}du = \frac{1}{\ln 2}\times\left[e^{u\times\ln 2}\right]_0^{\ln x}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\times\left[2^u\right]_0^{\ln x} = \frac{1}{\ln 2}\times\left(2^{\ln x} - 1\right)$$

Exercice 8A.10

Calculer $\int_4^5 \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}dx$.

Première méthode : avec une décomposition en éléments simples

$$\frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1} = \frac{3\left(x^2+2x+\frac{1}{3}\right)}{x^2+2x+1} = 3\times\frac{x^2+2x+1-\frac{2}{3}}{x^2+2x+1} = 3\times\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1} - 3\times\frac{\frac{2}{3}}{x^2+2x+1}$$
$$= 3 - \frac{2}{x^2+2x+1} = 3 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

On pose $u = x+1$, donc : $\frac{du}{dx} = 1$, d'où : $du = dx$.

→si $t = 4$: $u = 4+1 = 5$

→si $t = 5$: $u = 5+1 = 6$

Ainsi : $$\int_4^5 \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}dx = \int_4^5 3 - \frac{2}{(x+1)^2}dx = \int_4^5 3.dx - \int_4^5 \frac{2}{(x+1)^2}dx$$
$$= \int_4^5 3.dx - \int_5^6 \frac{2}{u^2}du = \int_4^5 3.dx - 2\int_5^6 \frac{du}{u^2}$$
$$= [3x]_4^5 + 2\times\left[\frac{1}{u}\right]_5^6 = 15 - 12 + 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{1}{15} = \frac{44}{15}$$

Deuxième méthode : en étant observateur, cela pourrait être une dérivée de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1} = \frac{3x^2+6x+1}{(x+1)^2}$$ donc v pourrait être égal à $x+1$ et $v' = 1$

$$\frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}=\frac{u'\times(x+1)-u\times 1}{(x+1)^2}\ :$$

→ u pourrait égal de la forme ax^2+bx+c d'où : $u'=2ax+b$

Ainsi : $$\frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}=\frac{(2ax+b)(x+1)-\left(ax^2+bx+c\right)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{2ax^2+2ax+bx+b-ax^2-bx-c}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}=\frac{ax^2+2ax+b-c}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ 2a=6 \\ b-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1+c \end{cases}$$: on peut prendre $c=0$ et $b=1$

Ainsi : $$\frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}=\frac{(6x+1)(x+1)-\left(3x^2+x\right)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

D'où : $$\int_4^5 \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}dx=\left[\frac{u}{v}\right]_4^5=\left[\frac{3x^2+x}{x+1}\right]_4^5=\frac{3\times 5^2+5}{5+1}-\frac{3\times 4^2+4}{4+1}$$

$$=\frac{80}{6}-\frac{52}{5}=\frac{400}{30}-\frac{312}{30}=\frac{88}{30}=\frac{44}{30}$$