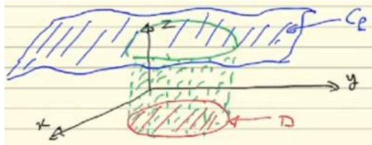
Pour aller plus loin : les Intégrales doubles – F. Quet

Une intégrale double est une intégrale simple d'une intégrale simple

Soit D appartenant au plan (xOy) et C_f la représentation graphique de la fonction f en 3D. $\iint_D f(x;y)\,dx\,dy$ représente le volume entre la surface D et la surface de C_f au-dessus de la surface D.



https://www.youtube.com/watch?v=Luk98zLjOOU

Exercice 9A.1

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1) $\int_0^2 \int_5^7 x^2 y\,dx\,dy$ 2) $\int_0^2 \int_5^7 x^2 + y\,dx\,dy$ 3) $\int_3^5 \int_1^x x^2 + y\,dy\,dx$

Exercice 9A.2

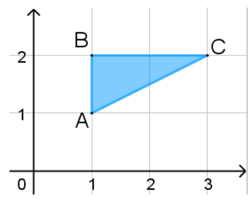
Soit D le domaine : $\mathrm{D} = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 ; y \geq 0 ; x + y \leq 1\right\}$.

Calculer $\iint_D f(x;y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1) $f(x;y) = x^2 + y^2$ 2) $f(x;y) = xy(x+y)$

Exercice 9A.3

Calculer l'intégrale double $I = \iint_D (2x - 8y)\,dx\,dy$ où D est le domaine intérieur au triangle ABC ci-contre.



Exercice 9A.4

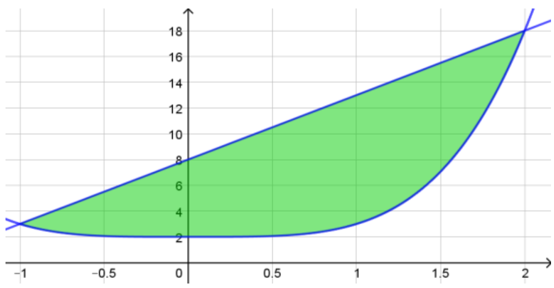
Calculer l'intégrale double $I = \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ où D est le domaine délimité par les droites :

$x = 1$, $y = x$ et $y = 2x$.

Exercice 9A.5

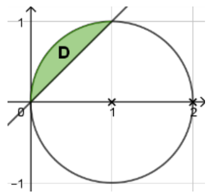
Calculer l'aire ci-contre obtenue sur l'intervalle $[-1;2]$ en traçant les fonctions :

$f(x) = x^4 + 2$ et $g(x) = 5x + 8$



Exercice 9A.6

Calculer l'intégrale double $I = \iint_D xy\,dx\,dy$ où D est défini ci-contre.



Exercice 9A.7

Calculer l'intégrale double $I = \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ où $\mathrm{D} = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x < y < 2x \\ x < y^2 < 2x \end{array}\right\}$

Exercice 9A.8

Soit D le domaine : $\mathrm{D} = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x \leq x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 \leq 1 ; y \geq 0\right\}$.

1) Représenter D dans un repère orthonormé.
2) Calculer l'intégrale $\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$.

Exercice 9A.1

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1) $$\int_0^2\int_5^7 x^2y\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_5^7 x^2y\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^2\left[\frac{x^3y}{3}\right]_5^7 dy$$

$$= \int_0^2 \frac{343y}{3} - \frac{125y}{3}\,dy$$

$$= \left[\frac{343y^2}{6} - \frac{125y^2}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{343\times 4}{6} - \frac{125\times 4}{6}$$

$$= \frac{686}{3} - \frac{250}{3}$$

$$= \frac{436}{3}$$

2) $$\int_0^2\int_5^7 x^2+y\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_5^7 x^2+y\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+xy\right]_5^7 dy$$

$$= \int_0^2\left(\frac{343}{3}+7y\right)-\left(\frac{125}{3}+5y\right)dy$$

$$= \int_0^2 \frac{218}{3}+2y\,dy$$

$$= \left[\frac{218}{3}y+y^2\right]_0^2$$

$$= \frac{436}{3}+4$$

$$= \frac{448}{3}$$

3) $$\int_3^5\int_1^x x^2+y\,dy\,dx = \int_3^5\left(\int_1^x x^2+y\,dy\right)dx$$

$$= \int_3^5\left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx$$

$$= \int_3^5\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_3^5 x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}x\right]_3^5$$

$$=\left(\frac{625}{4}-\frac{125}{6}-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{81}{4}-\frac{27}{6}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{544}{4}-\frac{98}{6}-1$$
$$=136-\frac{98}{6}-1$$
$$=\frac{135\times 3}{3}-\frac{49}{3}$$
$$\boxed{=\frac{356}{3}}$$

Exercice 9A.2

Soit D le domaine : $\mathrm{D}=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 ; x\geq 0; y\geq 0; x+y\leq 1\right\}$.

Calculer $\iint_{\mathrm{D}} f(x;y)\,dx\,dy$ *dans les cas suivants :*

1) $f(x;y)=x^2+y^2$

Il faut expliciter le domaine :

$$\mathrm{D}=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 ; x\geq 0; y\geq 0; y\leq 1-x\right\}=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 ; x\in[0;1]; 0\leq y\leq 1-x\right\}$$

Ainsi :

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x;y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{1-x} x^2+y^2\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx$$
$$=\int_0^1 x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\,dx$$
$$=\int_0^1 x^2-x^3+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3}\,dx$$
$$=\int_0^1 -\frac{4}{3}x^3+2x^2-x+\frac{1}{3}\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{3}+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$
$$\boxed{=\frac{1}{6}}$$

2) $$\iint_{\mathrm{D}} f(x;y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{1-x} xy(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x} x^2y+xy^2\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\left[\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right]_0^{1-x}dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^2(1-x)^2}{2}+\frac{x(1-x)^3}{3}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^2\left(1-2x+x^2\right)}{2}+\frac{x\left(1-3x+3x^2-x^3\right)}{3}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^2-2x^3+x^4}{2}+\frac{x-3x^2+3x^3-x^4}{3}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\,dx$$

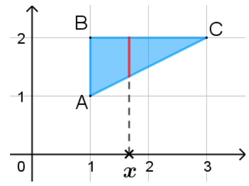
$$=\left[\frac{x^5}{30}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{30}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{30}$$

Exercice 9A.3

Calculer l'intégrale double $I=\iint_D (2x-8y)\,dx\,dy$ *où* D *est le domaine intérieur au triangle ABC ci-contre.*



$$I=\iint_D (2x-8y)\,dx\,dy=\int\left(\int_D (2x-8y)\ dy\right)dx$$

$$=\int_1^3\left(\int (2x-8y)\ dy\right)dx \qquad \rightarrow \text{car } x \text{ varie de 1 à 3}$$

L'équation de la droite (AC) est :

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Donc pour caractériser le domaine D, pour tout $x\in[1;3]$:

$$y\in\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2};2\right]$$

Ainsi : $$I=\int_1^3\left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2}(2x-8y)\ dy\right)dx$$

$$=\int_1^3\left[2xy-4y^2\right]_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2}dx$$

$$=\int_1^3(4x-16)-\left(2x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-4\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2\right)dx$$

$$=\int_1^3(4x-16)-\left(x^2+x-4\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\right)dx$$

$$=\int_1^3 4x-16-x^2-x+x^2+2x+1dx$$

$$=\int_1^3 5x-15\,dx$$

$$=\left[\frac{5}{2}x^2-15x\right]_1^3$$

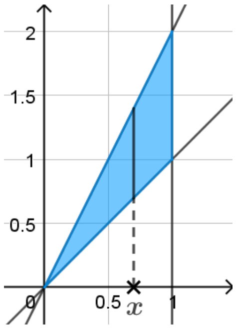
$$=\left(\frac{45}{2}-45\right)-\left(\frac{5}{2}-15\right)$$
$$=\frac{45}{2}-45-\frac{5}{2}+15$$
$$=20-30$$
$$=-10$$

Exercice 9A.4

Calculer l'intégrale double $I=\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ *où D est le domaine délimité par les droites :*

$x=1$, $y=x$ *et* $y=2x$.

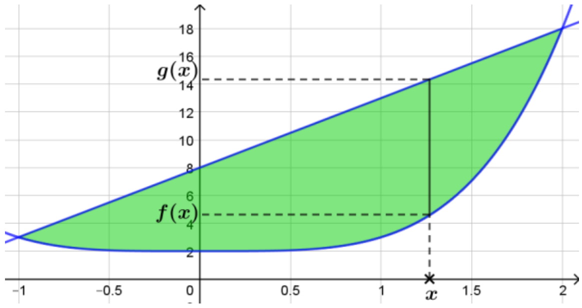
D'après le graphique ci-contre montrant le domaine D :



$$I=\int_0^1\left(\int_x^{2x}\frac{y}{x}dy\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\left[\frac{y^2}{2x}\right]_x^{2x}\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{4x^2}{2x}-\frac{x^2}{2x}\right)dx$$
$$=\int_0^1\frac{3}{2}x\,dx$$
$$=\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{4}$$

Exercice 9A.5

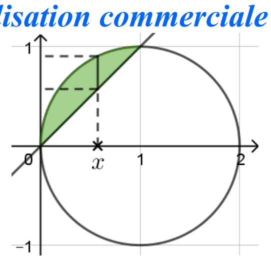
Calculer l'aire ci-contre obtenue sur l'intervalle $[-1;2]$ *en traçant les fonctions :* $f(x)=x^4+2$ *et* $g(x)=5x+8$.



L'aire cherchée est :

$$I=\iint_D 1\,dx\,dy=\int_{-1}^{2}\left(\int_{x^4+2}^{5x+8}1\,dy\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\left([y]_{x^4+2}^{5x+8}\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}5x+8-x^4-2\,dx$$
$$=\left[\frac{5x^2}{2}+6x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(\frac{20}{2}+12-\frac{32}{5}\right)-\left(\frac{5}{2}-6+\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{15}{2}+18-\frac{33}{5}$$
$$=\frac{75}{10}+\frac{180}{10}-\frac{66}{10}=\frac{189}{10}$$

Exercice 9A.6



Calculer l'intégrale double $I = \iint_D xy\,dx\,dy$ *où D est défini ci-contre.*

Le domaine D est caractérisé par la droite d'équation $y = x$ et par le cercle d'équation : $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Le demi-cercle positif est défini par la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$y = \sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

Ainsi le domaine D se définit par :

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{-x^2+2x} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I = \iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_x^{\sqrt{-x^2+2x}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x(-x^2+2x)}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-x^3+2x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-x^3 + x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Exercice 9A.7

Calculer l'intégrale double $I = \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ *où* $D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x < y < 2x \\ x < y^2 < 2x \end{array} \right\}$

La relation $x < 2x$ implique que $x > 0$.
On peut alors ré-exprimer le domaine D :

$$\begin{cases} x < y < 2x \\ x < y^2 < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < \dfrac{y}{x} < 2 \\ 1 < \dfrac{y^2}{x} < 2 \end{cases}$$

Changement de variables : on pose :

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ux \\ v = \dfrac{(ux)^2}{x} = u^2 x \end{cases} \quad \rightarrow \text{ainsi : } x = \frac{v}{u^2}$$

D'autre part :

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x}} = \frac{y}{x} \times \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \text{ainsi : } y = \frac{v}{u}$$

Or : $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$ donc par définition du domaine D : $\begin{cases} 1 < u < 2 \\ 1 < v < 2 \end{cases}$ …

La suite est difficile : https://www.youtube.com/watch?v=c1qcejbdDGs

Exercice 9A.8

Soit D le domaine : $\mathrm{D} = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x \le x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 \le 1 ; y \ge 0 \right\}$.

1) *Représenter D dans un repère orthonormé.*

$\mathrm{D} = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x \le x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 \le 1 ; y \ge 0 \right\}$

$$x \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x \ge 0$$

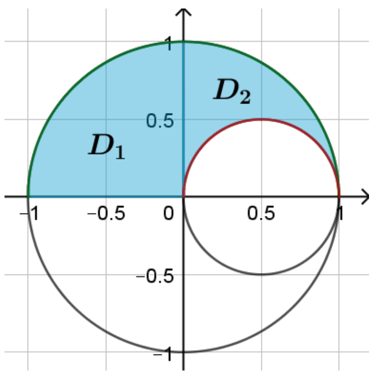
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \ge \frac{1}{4}$$

→ceci décrit un domaine extérieur au cercle de centre $\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$x^2 + y^2 \le 1$ →ceci décrit un domaine intérieur au cercle de centre $(0;0)$ et de rayon 1.

$y \ge 0$



2) *Calculer l'intégrale* $\iint_{\mathrm{D}} \dfrac{dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.

$$\iint_{\mathrm{D}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \iint_{\mathrm{D}_1} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} + \iint_{\mathrm{D}_2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$\mathrm{D}_1 = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0 ; y \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

$\mathrm{D}_2 = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0 ; 0 \leq x \leq x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

On pose des coordonnées polaires : ***Hors Programme***

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{D}_1} \frac{dx\,dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} &= \iint_{\mathrm{D}_1} \frac{r dr\, d\theta}{\left(1+r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)^2} = \iint_{\mathrm{D}_1} \frac{r}{\left(1+r^2\right)^2} dr\, d\theta \\
&= \int_0^1 \frac{r}{\left(1+r^2\right)^2} dr \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2} dr \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+r^2}\right]_0^1 \times [\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Sur D_2 : $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et …