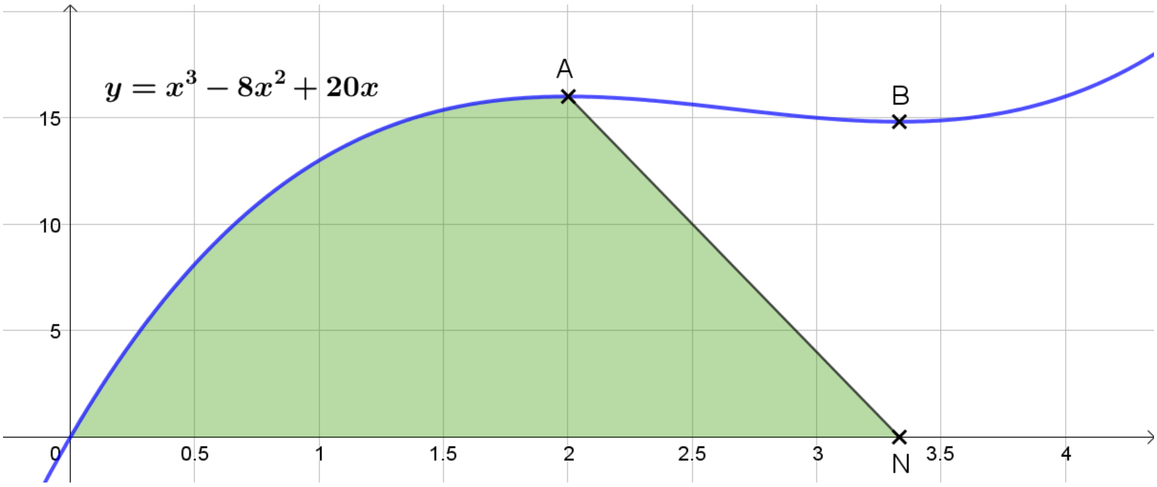
Exercices à prise d'initiative sur les intégrales

Exercice 1 :

Aux points A et B, la courbe C représentée ci-dessous admet une tangente horizontale.
Le point N, situé sur l'axe des abscisses, a la même abscisse que B.
Quelle est l'aire de la partie R délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et le segment $[AN]$?



Exercice 2 :

Soit f une fonction dérivable à dérivée continue (fonction de classe C^1) sur un intervalle $[a;b]$, avec $(a<b)$ et deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$: $m \leq f'(x) \leq M$.

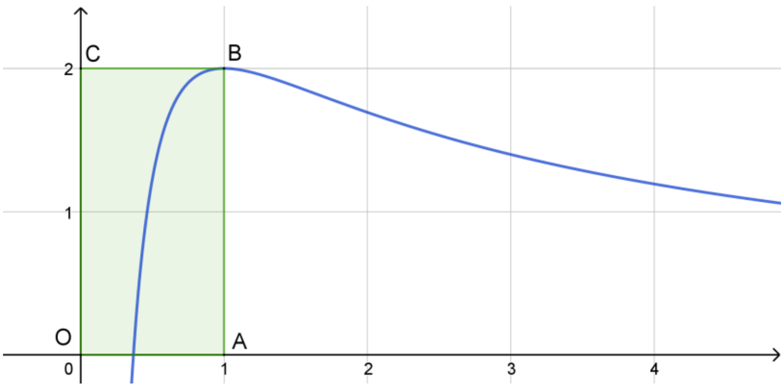
Démontrer que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Exercice 3 :

La figure ci-dessous donne la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

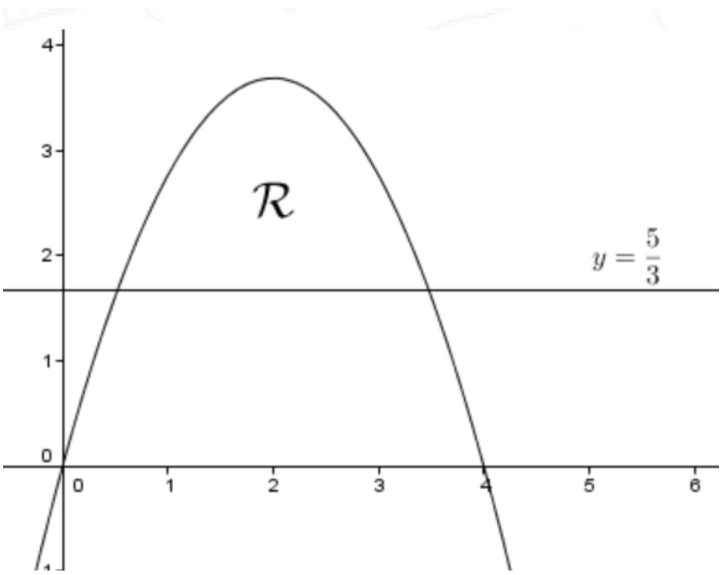
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$ et $(0;2)$.



Montrer que la courbe C_f partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

Exercice 4 :

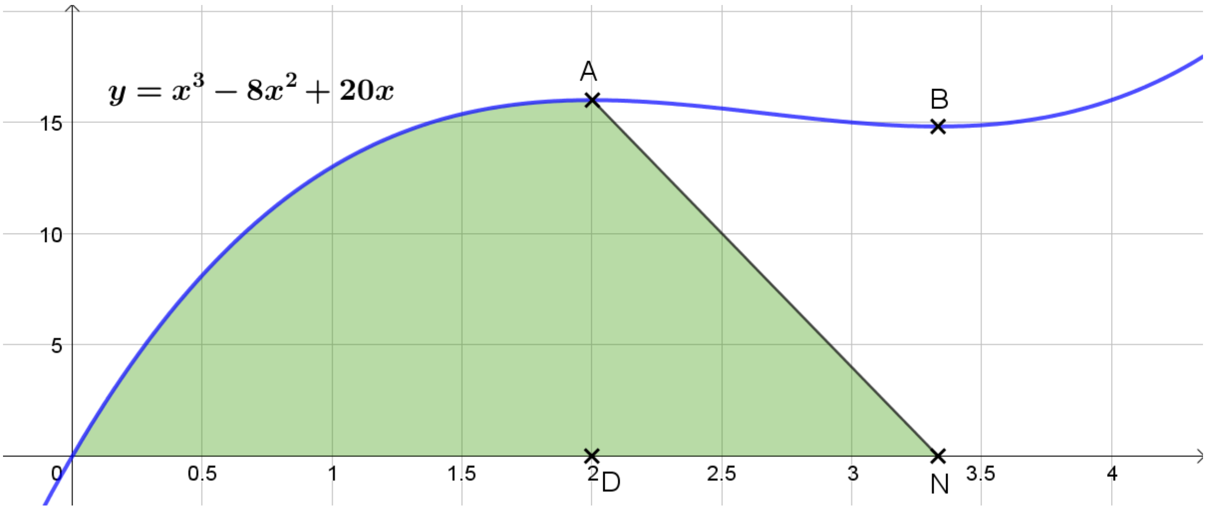
La fonction représentée ci-contre est une fonction polynôme (schéma à titre indicatif).
La partie notée R a pour aire 4 u.a.
Déterminer la fonction *f*.



CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Aux points A et B, la courbe C représentée ci-dessous admet une tangente horizontale.
Le point N, situé sur l'axe des abscisses, a la même abscisse que B.
Quelle est l'aire de la partie R délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et le segment $[\mathrm{AN}]$ *?*



L'aire cherchée est égale à :

$$\int_0^{x_{\mathrm{A}}} f(x)\,dx + A_{\mathrm{ADN}}$$

Il convient de trouver les coordonnées des points A et B puis D et N :
La fonction *f* est dérivable en tant que fonction polynomiale :

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 20$$

$\Delta = (-16)^2 - 4\times3\times20 = 256 - 240 = 16 = 4^2$ d'où deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-16)-4}{2\times3} = \frac{16-4}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-16)+4}{2\times3} = \frac{16+4}{6} = \frac{10}{3}.$$

Or $\qquad f(2) = 2^3 - 8\times2^2 + 20\times2 = 8 - 32 + 40 = 16$

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 8\times\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 20\times\frac{10}{3} = \frac{1000}{27} - \frac{800}{9} + \frac{200}{3} = \frac{1000}{27} - \frac{2400}{27} + \frac{1800}{27} = \frac{400}{27}$$

D'où les points suivants :

$$\mathrm{A}(2;16)\ ,\ \mathrm{B}\left(\frac{10}{3};\frac{400}{27}\right)\ ,\ \mathrm{D}(2;0)\ \text{et}\ \mathrm{N}\left(\frac{10}{3};0\right).$$

La fonction *f* est continue en tant que fonction polynomiale et admet une primitive :

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 8\times\frac{x^3}{3} + 20\times\frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}x^3 + 10x^2.$$

Ainsi l'aire cherchée devient :

$$\int_0^{x_{\mathrm{A}}} f(x)\,dx + A_{\mathrm{ADN}} = F(2) - F(0) + \frac{(x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{C}})(y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{C}})}{2}$$

$$= \frac{2^4}{4} - \frac{8}{3}\times2^3 + 10\times2^2 + \frac{\left(\frac{10}{3} - 2\right)(16-0)}{2} = 4 - \frac{64}{3} + 40 + \frac{\frac{4}{3}\times16}{2} = 44 - \frac{64}{3} + \frac{32}{3} = 44 - \frac{32}{3} = \frac{100}{3}$$

Exercice 2 :

Soit f une fonction dérivable à dérivée continue (fonction de classe C^1) sur un intervalle $[a;b]$, avec $(a<b)$ et deux réels m et M tels que pour tout $x\in[a;b]$: $m\leq f'(x)\leq M$.

Démontrer que : $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$

Si $\quad m\leq f'(x)\leq M \quad$ avec $a<b$

Alors $\quad \int_a^b m.dx\leq\int_a^b f'(x).dx\leq\int_a^b M.dx$

$\Leftrightarrow \quad m\times[x]_a^b\leq[f(x)]_a^b\leq M\times[x]_a^b$

$\Leftrightarrow \quad m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$

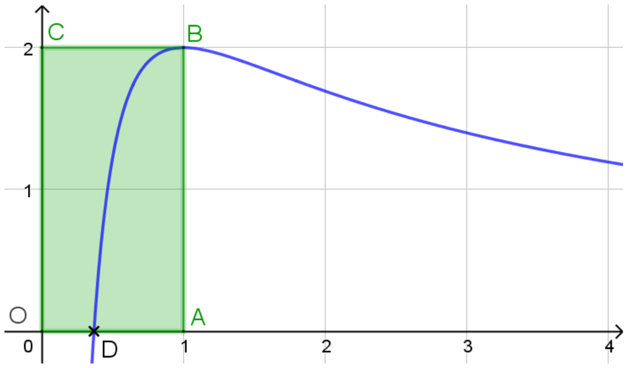
Exercice 3 :

La figure ci-dessous donne la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

par : $\quad f(x)=\dfrac{2}{x}+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$ et $(0;2)$.

Montrer que la courbe C_f partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.



On doit d'abord déterminer les coordonnées du point D :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}+2\times\frac{1}{x}\times\ln x=0 \Leftrightarrow \frac{2+2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$$

L'aire du rectangle OABC mesure :

$1\times2=2$ u.a.

L'aire sous la courbe sur l'intervalle $\left[e^{-1};1\right]$ vaut :

$$\int_{e^{-1}}^1 f(x)\,dx=\int_{e^{-1}}^1\frac{2}{x}+2\times\frac{1}{x}\times\ln x\,dx$$

On pose $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$, et la primitive devient :

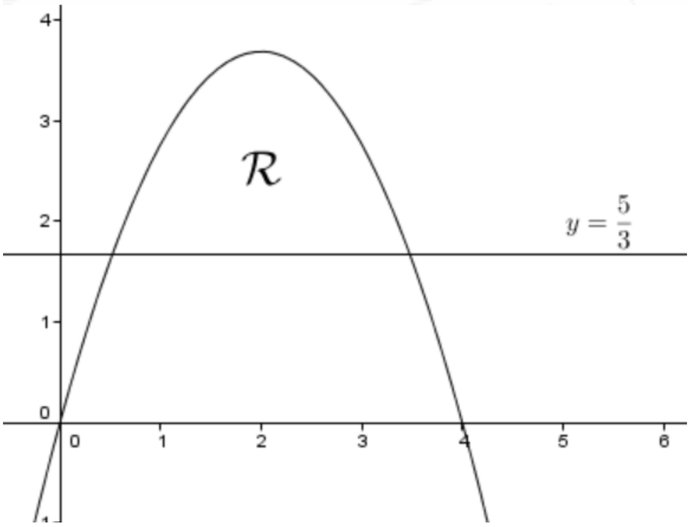
$$\int_{e^{-1}}^1 f(x)\,dx=\int_{e^{-1}}^1\frac{2}{x}+2\times u'(x)\times u(x)\,dx=\left[2\ln x+u^2(x)\right]_{e^{-1}}^1$$

$$=2\ln1-2\ln\left(e^{-1}\right)+\ln^2 1-\ln^2\left(e^{-1}\right)=-2\times(-1)-(-1)^2=2-1=1$$

Ce résultat est bien égal à la moitié de l'aire du rectangle OABC, donc la courbe C_f partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

Exercice 4 :

La fonction représentée ci-dessous est une fonction polynôme (schéma à titre indicatif).
La partie notée R a pour aire 4 u.a. Déterminer la fonction f.



La fonction cherchée est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{donc : } f'(x) = 2ax + b$$

avec :

$$f(0) = f(4) = 0 \text{ et } f'(2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ a \times 4^2 + b \times 4 + c = 0 \\ 2a \times 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ b = -4a \end{cases}.$$

La fonction cherchée devient :

$$f_a(x) = ax^2 - 4ax = ax(x-4).$$

Le sommet de la parabole est au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$ donc :

$$f(2) > \frac{5}{3} \Leftrightarrow a \times 2^2 - 4a \times 2 > \frac{5}{3} \Leftrightarrow 4a - 8a > \frac{5}{3} \Leftrightarrow -4a > \frac{5}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{5}{12}.$$

→le sommet S a pour coordonnées $S\left(2; -\frac{5}{12}\right)$.

L'aire cherchée est au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$:

$$f(x) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow ax^2 - 4ax = \frac{5}{3} \Leftrightarrow ax^2 - 4ax - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 - 12ax - 5 = 0.$$

→ $\Delta = (-12a)^2 - 4 \times 3a \times (-5) = 144a^2 + 60a = 12a(12a+5)$

On sait que $a < -\frac{5}{12} \Leftrightarrow 12a < -5 \Leftrightarrow 12a + 5 < 0$ et $a < -\frac{5}{12} \Leftrightarrow 12a < -5 < 0$.

Donc $\Delta > 0$: il existe deux solutions :

$$x_1 = \frac{12a - \sqrt{144a^2 + 60a}}{2 \times 3a} = \frac{2 \times 6a - 2\sqrt{36a^2 + 15a}}{2 \times 3a} = 2 - \frac{\sqrt{36a^2 + 15a}}{3a},$$

$$x_2 = \frac{12a + \sqrt{144a^2 + 60a}}{2 \times 3a} = \frac{2 \times 6a + 2\sqrt{36a^2 + 15a}}{2 \times 3a} = 2 + \frac{\sqrt{36a^2 + 15a}}{3a}.$$

L'aire cherchée est donc : $\int_{x_1}^{x_2} \left(f_a(x) - \frac{5}{3} \right).dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(ax^2 - 4ax - \frac{5}{3} \right).dx$.

Par symétrie, elle est aussi égale à :

$$2\times\int_2^{x_2}\left(ax^2-4ax-\frac{5}{3}\right).dx$$

Or cette aire est égale à 4 unités d'aire, donc :

$$2\times\int_2^{x_2}\left(ax^2-4ax-\frac{5}{3}\right).dx=4 \iff \int_2^{x_2}\left(ax^2-4ax-\frac{5}{3}\right).dx=2\,.$$

Soit en intégrant :

$$\left[a\times\frac{x^3}{3}-4a\times\frac{x^2}{2}-\frac{5}{3}\times x\right]_2^{x_2}=2$$

$$\iff \left(\frac{a}{3}\times {x_2}^3-2a\times {x_2}^2-\frac{5}{3}\times x_2\right)-\left(a\times\frac{2^3}{3}-4a\times\frac{2^2}{2}-\frac{5}{3}\times 2\right)=2$$

$$\iff \left(\frac{a}{3}\times {x_2}^3-2a\times\left(2+\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}\right)^2-\frac{5}{3}\times\left(2+\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}\right)\right)-\left(\frac{8}{3}a-8a\times-\frac{10}{3}\right)=2$$

$$\iff \frac{a}{3}\times {x_2}^3-2a\times\left(2+\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}\right)^2-\frac{10}{3}-\frac{5}{9a}\times\sqrt{36a^2+15a}+\frac{16}{3}a+\frac{10}{3}=2$$

Calculs séparés :

$$\left(2+\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}\right)^2=4+\frac{4}{3a}\times\sqrt{36a^2+15a}+\frac{36a^2+15a}{9a^2}=4+\frac{4}{3a}\sqrt{36a^2+15a}+\frac{13a+5}{3a}$$

$$\left(2+\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}\right)^3=8+3\times 2^2\times\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}+3\times 2\times\frac{36a^2+15a}{9a^2}+\frac{\left(36a^2+15a\right)\sqrt{36a^2+15a}}{27a^3}$$

$$=8+\frac{4}{a}\times\sqrt{36a^2+15a}+\frac{2(12a+5)}{a}+\frac{(12a+5)\sqrt{36a^2+15a}}{9a^2}$$

Donc :

$$\frac{a}{3}\times {x_2}^3=\frac{8a}{3}+\frac{4}{3}\times\sqrt{36a^2+15a}+\frac{2(12a+5)}{3}+\frac{(12a+5)\sqrt{36a^2+15a}}{27a}$$

$$-2a\times\left(2+\frac{\sqrt{36a^2+15a}}{3a}\right)^2=-8a-\frac{8}{3}\sqrt{36a^2+15a}-\frac{2(12a+5)}{3}$$

Ainsi l'équation devient :

$$\frac{8a}{3}+\frac{4}{3}\times\sqrt{36a^2+15a}+\frac{2(12a+5)}{3}+\frac{(12a+5)\sqrt{36a^2+15a}}{27a}-8a-\frac{8}{3}\sqrt{36a^2+15a}-\frac{2(12a+5)}{3}$$
$$-\frac{5}{9a}\times\sqrt{36a^2+15a}+\frac{16}{3}a=2$$

$$\iff \frac{2(12a+5)}{3}+\frac{(12a+5)\sqrt{36a^2+15a}}{27a}-\frac{4}{3}\sqrt{36a^2+15a}-\frac{2(12a+5)}{3}-\frac{5}{9a}\times\sqrt{36a^2+15a}=2$$

$$\iff \frac{24a}{3}+\frac{10}{3}+\frac{4\sqrt{36a^2+15a}}{9}+\frac{5\sqrt{36a^2+15a}}{27a}-\frac{4}{3}\sqrt{36a^2+15a}-\frac{24a}{3}-\frac{10}{3}-\frac{5}{9a}\times\sqrt{36a^2+15a}=2$$

$$\iff -\frac{8}{9}\sqrt{36a^2+15a}-\frac{10}{27a}\times\sqrt{36a^2+15a}=2$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{8}{9}-\frac{10}{27a}\right)\times\sqrt{36a^2+15a}=2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-24a-10}{27a}\right)\times\sqrt{36a^2+15a}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{36a^2+15a}=2\times\frac{27a}{-24a-10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{36a^2+15a}=\frac{54a}{-24a-10}$$

$$\Leftrightarrow 36a^2+15a=\left(\frac{54a}{-24a-10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 36a^2+15a=\frac{2916a^2}{576a^2+480a+100}$$

$$\Leftrightarrow 36a^2+15a=\frac{729a^2}{144a^2+120a+25}$$

$$\Leftrightarrow 12a^2+5a=\frac{243a^2}{144a^2+120a+25}$$

$$\Leftrightarrow 12a+5=\frac{243a}{144a^2+120a+25}$$

$$\Leftrightarrow (12a+5)\left(144a^2+120a+25\right)=243a$$

$$\Leftrightarrow 1728a^3+1440a^2+300a+720a^2+600a+125=243a$$

$$\Leftrightarrow 1728a^3+2160a^2+657a+125=0$$

Avec un tableur, on trouve :

$$a\simeq -0{,}923.$$

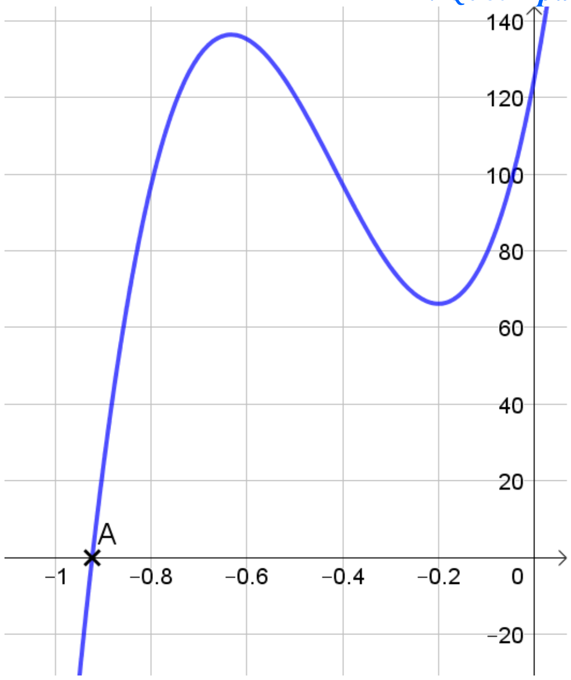
Vérification :

$$x_2=2+\frac{\sqrt{36\times(-0{,}923)^2+15\times(-0{,}923)}}{3\times(-0{,}923)}\simeq 0{,}5187$$

$$f(x)-\frac{5}{3}=ax^2-4ax-\frac{5}{3}=(-0{,}923)x^2-4\times(-0{,}923)\times x-\frac{5}{3}=-0{,}923x^2+3{,}692x-\frac{5}{3}$$

D'où l'aire :

$$\int_{x_1}^{2}\left(ax^2-4ax-\frac{5}{3}\right).dx=\int_{0{,}5187}^{2}\left(-0{,}923x^2+3{,}692x-\frac{5}{3}\right).dx\simeq 2{,}0001$$



<u>Corrigé du net</u>

$f(0) = 0$ et $f(4) = 0 \Leftrightarrow f(x) = a(x^2 - 4x)$.

$f'(2) = 0$, donc la parabole a pour sommet le point S $(2\,;f(2))$, Comme S est au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$, $f(2) > \frac{5}{3}$ et $f(2) > \frac{5}{3} \Leftrightarrow -4a > \frac{5}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{5}{12}$.

Posons $f_a(x) = ax^2 - 4ax$ pour tout réel x et $a < -\frac{5}{12}$.

Remarque :

pour $a = -\frac{5}{12}$, la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$ est tangente à la parabole d'équation $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{3}x$ en son sommet de coordonnées $\left(2\,;\frac{5}{3}\right)$.

Pour $a < -\frac{5}{12}$, l'équation $f_a(x) = \frac{5}{3}$ a deux solutions l'une α dans$]0\,;2[$, l'autre β dans $]2\,;4[$ avec $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2$ car la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour la parabole d'équation $y = f(x)$.

$f_a(x) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow ax^2 - 4ax - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a}$ ou $x = 2 - \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a}$.

Remarque :

comme $a < -\frac{5}{12}$, $0 < 4a^2 + \frac{5a}{3} < 4a^2$ et

$0 < 2 + \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a} < 2$;

$$\frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a} = -\frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{-a} = -\frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{\sqrt{a^2}} = -\sqrt{4 + \frac{5}{3a}}$$

Donc $\alpha(a) = 2 - \sqrt{4 + \frac{5}{3a}}$ et on a bien $0 < \alpha(a) < 2$.

L'aire de la partie du plan colorée est égale à $\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right) dx$.

Par raison de symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$, $\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right) dx = 2\int_{a(a)}^{2} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right) dx$.

Donc $\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right) dx = 4 \Leftrightarrow \int_{\alpha(a)}^{2} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right) dx = 2$.

Posons $g_a(x) = f_a(x) - \frac{5}{3}$.

Si $a_2 < a_1 < -\frac{5}{12}$, pour tout x dans $[0\,;2]$,

$g_{a_1}(x) - g_{a_2}(x) = (a_1 - a_2)(x^2 - 4x)$.

Sur $]0\,;2]$, $x^2 - 4x < 0$ donc, comme $a_1 - a_2 > 0$,

$g_{a_1}(x) - g_{a_2}(x) < 0$ sur $]0\,;2]$ et $g_{a_1}(0) - g_{a_2}(0) = 0$.

$a \mapsto \alpha(a) = 2 - \sqrt{4 + \frac{5}{3a}}$ est dérivable sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ car la fonction $a \mapsto 4 + \frac{5}{3a}$ est dérivable sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ et y est strictement positive.

$\alpha'(a) = \frac{5}{6a^2\sqrt{4 + \frac{5}{3a}}}$ donc $\alpha'(a) > 0$,

$a \mapsto \alpha(a)$ est donc strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$, d'où $\alpha(a_2) < \alpha(a_1)$.

Comme $g_{a_1}(x) < g_{a_2}(x)$ sur $]0\,;2]$ et $\alpha(a_2) < \alpha(a_1)$ avec $0 < \alpha(a_2) < \alpha(a_1) < 2$ et $g_{a_2}(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha(a_2)\,;2]$ et $g_{a_1}(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha(a_1)\,;2]$.

$$\int_{\alpha(a_1)}^{2} g_{a_1}(x)\,dx < \int_{\alpha(a_1)}^{2} g_{a_2}(x)\,dx \leqslant \int_{\alpha(a_2)}^{2} g_{a_2}(x)\,dx$$

Donc la fonction $a \mapsto \int_{\alpha(a)}^{2} g_a(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$.

Posons $\mathrm{I}(a) = \int_{\alpha(a)}^{2} g_a(x)\,dx$

$x \mapsto \mathrm{G}_a(x) = a\frac{x^3}{3} - 2ax^2 - \frac{5}{3}x$ est une primitive de $x \mapsto g_a(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a) &= \mathrm{G}_a(2) - \mathrm{G}_a(\alpha(a))\\ &= -7a - \frac{a}{3}(\alpha(a))^3 + 2a(\alpha(a))^2 + \frac{5}{3}\alpha(a).\end{aligned}$$

$a \mapsto a$ et $a \mapsto \alpha(a)$ sont continues sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ donc $a \mapsto \mathrm{I}(a)$ est continue sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$, de même que $a \mapsto 2\mathrm{I}(a)$.

$a \mapsto 2\mathrm{I}(a)$ est donc une fonction continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$.

$2\mathrm{I}(-1) \approx 4{,}7$ et $2\mathrm{I}(-0{,}5) \approx 0{,}4$.

$4 \in [0{,}4\,;4{,}7]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de $a \mapsto 2\mathrm{I}(a)$, il existe un unique réel a dans $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ tel que $2\mathrm{I}(a) = 4$ avec $-1 < a < -0{,}5$.

En utilisant un logiciel de calcul formel (par exemple GeoGebra) par approximations successives nous obtenons :

$2\mathrm{I}(-0{,}923) \approx 4{,}00015$ et $2\mathrm{I}(-0{,}922) \approx 3{,}99045$. Donc a tel que $-0{,}923 \leqslant a \leqslant -0{,}922$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution de $\int_{\alpha(a)}^{4-\alpha(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right) dx = 4$ et, pour tout réel x,

$f_a(x) = ax^2 - 4ax$ est une valeur approchée de $f(x)$.