Notre Dame de La Merci

Contrôle sur les Intégrales

Exercice 1: Pour chacune des fonctions ci-dessous déterminer une primitive. / 3 pts

$f(x) = 2x^5 - 4x - 3$ $\qquad f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{7}{\sqrt{x}} + x^{-3} - \dfrac{10}{x}$ $\qquad f(x) = e^{5x} - \dfrac{1}{3}e^{-4x}$

Exercice 2 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes . / 4 pts

$f(x) = 2\left(x^4 - 3\right)\left(x^5 - 15x\right)$ $\qquad f(x) = \left(x^2 - 3\right)e^{\left(-x^3 + 9x\right)}$

$f(x) = \dfrac{-12x + 8}{3x^2 - 4x - 10}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2 + 10}}$

Exercice 3 : Déterminer la primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(5 + 2x)^3}$ qui s'annule en -1. / 2 pt

Exercice 4 : Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes : / 4 pts

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)dx$ $\qquad \displaystyle\int_{\ln 5}^{\ln 8} \frac{5}{x}\ln x\,dx$

Exercice 5 : Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = \dfrac{3x}{\left(x^2 + 4\right)^2}$ sur $[2;5]$. /2 pts

Exercice 6 : *Aire* / 3 pts

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\left(x^2 - x - 12\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer (en unités d'aires) l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 7 : / 2 pts

Compléter le programme suivant afin de calculer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = 2x^2$ sur l'intervalle $[2;4]$ en utilisant la méthode des rectangles intérieurs avec un découpage régulier de 1000 rectangles :

```
aire = 0
nb_rectangles = ……..
borne_inf = ….
borne_sup = ….
largeur_rectangle = ……………………………………………………………………
for i in range(1,………………..……..):
    hauteur_rectangle = 2 * (……………………………………………………………………)**2
    aire += …………………………..………………………………
print("L'aire cherchée est :",…………...…….)
```

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1: *Pour chacune des fonctions ci-dessous déterminer une primitive.* / 3 pts

$f(x)=2x^5-4x-3$

$F(x)=\dfrac{2x^6}{6}-4\times\dfrac{x^2}{2}-3x$

$F(x)=\dfrac{x^6}{3}-2x^2-3x$

$f(x)=\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{7}{\sqrt{x}}+x^{-3}-\dfrac{10}{x}$

$F(x)=3\times\dfrac{x^{-3}}{-3}+7\times2\sqrt{x}+\dfrac{x^{-2}}{-2}-10\ln x$

$F(x)=\dfrac{-1}{x^3}+14\sqrt{x}+\dfrac{-1}{2x^2}-10\ln x$

$f(x)=e^{5x}-\dfrac{1}{3}e^{-4x}$

$F(x)=\dfrac{e^{5x}}{5}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{e^{-4x}}{-4}$

$F(x)=\dfrac{e^{5x}}{5}+\dfrac{e^{-4x}}{12}$

Exercice 2 : *Déterminer une primitive des fonctions suivantes.* / 4 pts

$f(x)=2\left(x^4-3\right)\left(x^5-15x\right)$ on pose $u(x)=x^5-15x$ donc $u'(x)=5x^4-15$

Ainsi : $f(x)=2\times\dfrac{1}{5}u'(x)\times u(x)$ d'où : $F(x)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{u^2(x)}{2}=\dfrac{1}{5}\left(x^5-15x\right)^2$

$f(x)=\left(x^2-3\right)e^{\left(-x^3+9x\right)}$ on pose $u(x)=-x^3+9x$ donc $u'(x)=-3x^2+9$

Ainsi : $f(x)=-\dfrac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$ d'où : $F(x)=-\dfrac{1}{3}e^{u(x)}=-\dfrac{1}{3}e^{-x^3+9x}$

$f(x)=\dfrac{-12x+8}{3x^2-4x-10}$ on pose $u(x)=3x^2-4x-10$ donc $u'(x)=6x-4$

Ainsi : $f(x)=\dfrac{-2\times u'(x)}{u(x)}$ d'où : $F(x)=-2\times\ln\left(u(x)\right)=-2\ln\left(3x^2-4x-10\right)$

$f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2+10}}$ on pose $u(x)=2x-x^2+10$ donc $u'(x)=2-2x$

Ainsi : $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ d'où : $F(x)=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{u(x)}=\sqrt{2x-x^2+10}$

Exercice 3 : *Déterminer la primitive de la fonction* $f(x)=\dfrac{1}{(5+2x)^3}$ *qui s'annule en* -1. / 2 pt

On pose $u(x)=5+2x$ donc $u'(x)=2$ Ainsi : $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}u'(x)}{u^3(x)}=\dfrac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)$

D'où : $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^{-2}(x)}{-2}+k=-\dfrac{1}{4(5+2x)^2}+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$

Or on cherche k tel que : $F(-1)=0 \iff -\dfrac{1}{4\left(5+2\times(-1)\right)^2}+k=0 \iff k=\dfrac{1}{4\times9}=\dfrac{1}{36}$

Ainsi : $F(x)=-\dfrac{1}{4(5+2x)^2}+\dfrac{1}{36}$

Exercice 4 : *Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :* / 4 pts

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ on pose $u(x)=5x+\frac{\pi}{2}$ donc $u'(x)=5$

Ainsi $\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$ s'écrit : $\frac{1}{5}u'(x)\sin(u(x))$

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\left[-\frac{1}{5}\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{5}\cos\left(5\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{5}\cos\left(5\times 0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{5}$

$\int_{\ln 5}^{\ln 8} \frac{5}{x}\ln x dx$ on pose $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\frac{1}{x}$ Ainsi $\frac{5}{x}\ln x$ s'écrit : $5\times u'(x)\times u(x)$

D'où : $\int_{\ln 5}^{\ln 8} \frac{5}{x}\ln x dx=\left[\frac{5}{2}(\ln x)^2\right]_{\ln 5}^{\ln 8}=\frac{5}{2}\left[(\ln(\ln 8))^2-(\ln(\ln 5))^2\right]$

Exercice 5 : *Déterminer la valeur moyenne de* $f(x)=\frac{3x}{\left(x^2+4\right)^2}$ *sur* $[2;5]$. /2 pts

On pose $u(x)=x^2+4$ donc $u'(x)=2x$ Ainsi : $f(x)=\frac{\frac{3}{2}u'(x)}{u^2(x)}=\frac{3}{2}u'(x)u^{-2}(x)$

Donc une primitive de f est : $F(x)=\frac{3}{2}\times\frac{u^{-1}(x)}{-1}=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{u(x)}=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x^2+4}$

Valeur moyenne de f sur $[2;5]$:

$$\frac{1}{5-2}\int_2^5 f(x)dx=\frac{1}{3}\left[-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x^2+4}\right]_2^5=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+4}\right]_2^5=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5^2+4}-\frac{1}{2^2+4}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{8}\right)$$

Exercice 6 : *Soit la fonction f définie par* $f(x)=x\left(x^2-x-12\right)$ *définie sur* $\mathbb{R}$ / 4 pts

1) *Etudier le signe de f sur* $\mathbb{R}$.
2) *Calculer (en unités d'aires) l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=-1$ *et* $x=1$.

1) $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-12)=1+48=49=7^2$ $\rightarrow x_1=\frac{-(-1)-7}{2\times 1}=-3$ et $x_2=\frac{-(-1)+7}{2\times 1}=4$

Tableau de signe de *f* :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-12		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) L'aire cherchée est donc : $\int_{-1}^{0} f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$ Or $f(x)=x\left(x^2-x-12\right)=x^3-x^2-12x$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right]_0^1$$

$$=0-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}-6\times(-1)^2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}-6\times 1^2\right)=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-6\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-6\right)=-\frac{2}{4}+12=\frac{23}{2}$$

Exercice 7 : / 2 pts

Compléter le programme suivant afin de calculer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)=2x^2$ *sur l'intervalle* $[2;4]$ *en utilisant la méthode des rectangles intérieurs avec un découpage régulier de 1000 rectangles :*

```
aire = 0
nb_rectangles = 1000
borne_inf = 2
borne_sup = 4
largeur_rectangle =(borne_sup-borne_inf)/nb_rectangles
for i in range(0,nb_rectangles):
   hauteur_rectangle = 2 * (borne_inf + i * largeur_rectangle)**2
   aire += largeur_rectangle * hauteur_rectangle
print("L'aire cherchée est :",aire)
```

On obtient :

L'aire cherchée est : 37.309336000000016

La valeur exacte est :

$$\ln 6 = \int_2^4 2x^2\,dx = \frac{112}{3} \simeq 37,333$$