Périodicité et parité de fonctions trigonométriques (rappels de première)

Exercice 2A.1 :

Etudier l'ensemble de définition, la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$
2) $f(x)=\cos 2x$

Exercice 2A.2 :

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
2) $f(x)=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$ définie sur $\mathbb{R}$.
3) $f(x)=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
4) $f(x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2A.3 :

L'unité étant le radian, démontrer que $\dfrac{2\pi}{5}$ est la période de la fonction $f : x \mapsto \sin 5x+\cos 5x$

Exercice 2A.4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\cos x}{\cos 2x}$

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f
2) Etudier la parité et la périodicité éventuelles de f

Exercice 2A.5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(3x)\times\cos(4x)$

Etudier la parité et la périodicité éventuelles de f

Exercice 2A.1 :

Etudier l'ensemble de définition, la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$

Détermination l'ensemble de définition de *f*.

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction *f* :

$f(-x)=\sin\dfrac{-x}{2}=-\sin\dfrac{x}{2}=-f(x)$ donc *f* est impaire : on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$f(x+p)=f(x)$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{x+p}{2}=\sin\dfrac{x}{2}$

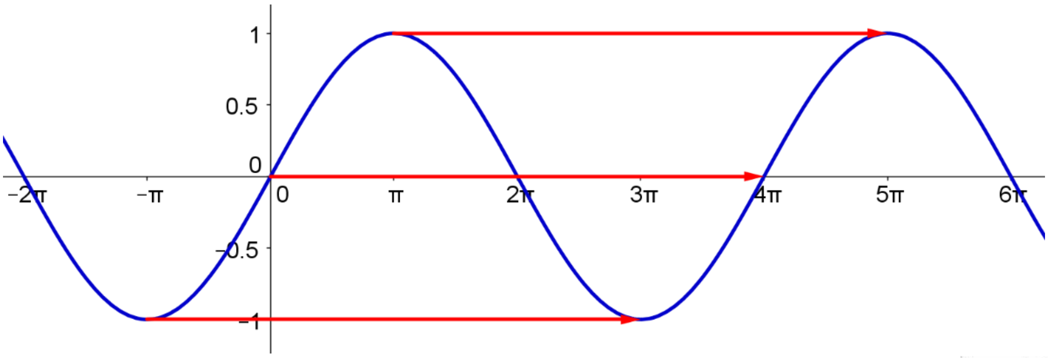
$\Leftrightarrow \dfrac{x+p}{2}=\dfrac{x}{2}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow \dfrac{x+p}{2}=\dfrac{x}{2}[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x+p=x+k\times 4\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow x+p=x[4\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow p=k\times 4\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow p=0[4\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

f est périodique de période 4π et impaire :

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π , par exemple : $[0;2\pi]$.



2) $f(x)=\cos 2x$

Détermination l'ensemble de définition de *f*.

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction *f* :

$f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$ donc *f* est paire : on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$f(x+p)=f(x)$

$\Leftrightarrow \cos(2(x+p))=\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos(2x+2p)=\cos 2x$

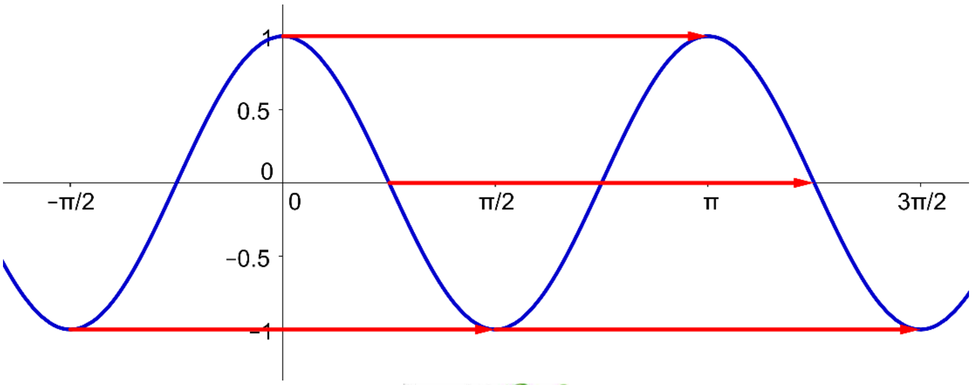
$\Leftrightarrow 2x+2p=2x+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow 2x+2p=2x[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2p=k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow 2p=0[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow p=k\times \pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow p=0[\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

f est périodique de période π et paire

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude $\dfrac{\pi}{2}$, par exemple : $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$



Exercice 2A.2 :

1) $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$

Détermination l'ensemble de définition de *f*.

f est définie si $2+\cos x\neq 0$ soit $\cos x\neq -2$. Or pour tout réel *x*, $\cos x\geq -1$, donc $D_f=\mathbb{R}$.

Etude de la parité de la fonction *f* :

$$f(-x)=\frac{2}{2+\cos(-x)}=\frac{2}{2+\cos x}=f(x)$$ donc *f* est paire.

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

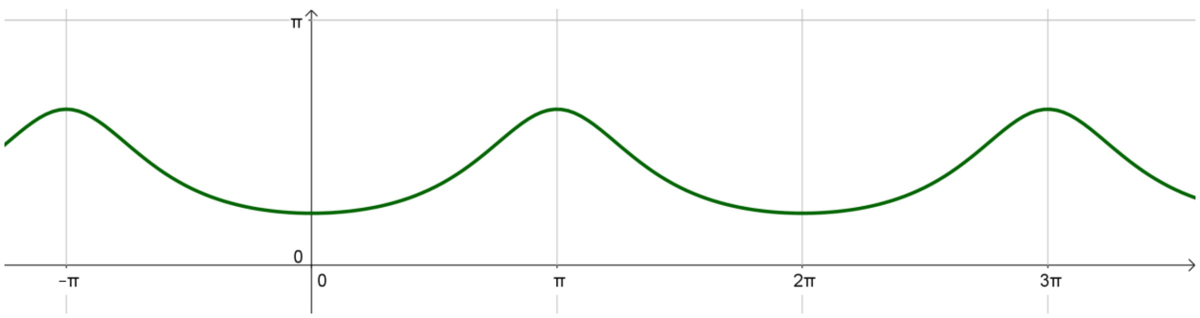
$$f(x+p)=f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2+\cos(x+p)}=\frac{2}{2+\cos x}$$

$\Leftrightarrow x+p=x+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow x+p=x[2\pi],\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow p=k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow p=0[2\pi],\ k\in\mathbb{Z}$

donc *f* est 2π - périodique



2) $f(x)=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$

Détermination l'ensemble de définition de *f*.

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

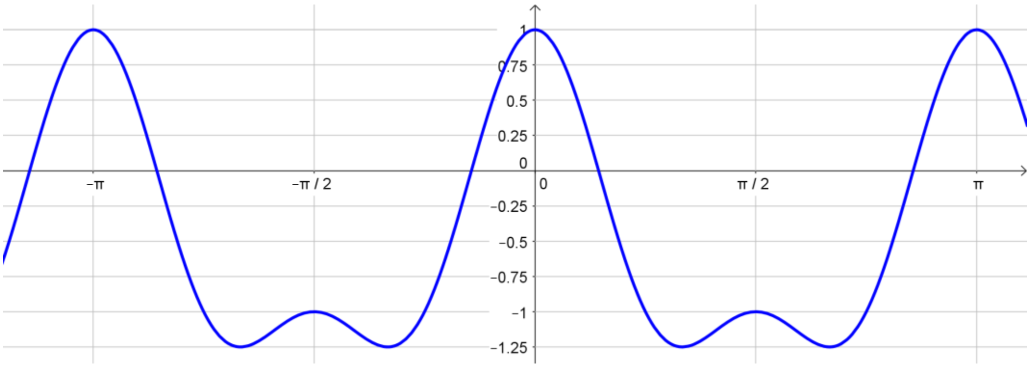
Etude de la parité de la fonction *f* :

$$f(-x)=\cos^2(-2x)+\cos(-2x)-1=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1=f(x)$$ donc *f* est paire.

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$$f(x+p)=f(x)$$
$$\Leftrightarrow \cos^2(2(x+p))+\cos(2(x+p))-1=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2(2x+2p)+\cos(2x+2p)=\cos^2(2x)+\cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow 2x+2p=2x+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow 2x+2p=2x[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 2p=k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow 2p=0[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow p=k\times \pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow p=0[\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1=f(x)$$ donc *f* est π - périodique



3) $f(x)=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$

Détermination l'ensemble de définition de *f*.

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction *f* :

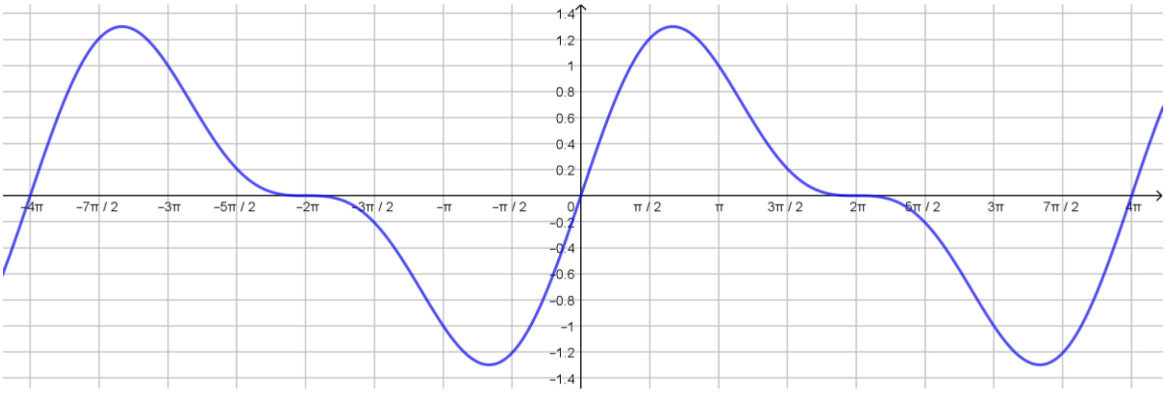
$$f(-x)=\left(1+\cos\frac{-x}{2}\right)\sin\frac{-x}{2}=\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\left(-\sin\frac{x}{2}\right)=-f(x)$$ donc *f* est impaire.

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$$f(x+p)=f(x)$$
$$\Leftrightarrow \left(1+\cos\frac{x+p}{2}\right)\sin\frac{x+p}{2}=\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+p}{2}=\frac{x}{2}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \frac{x+p}{2}=\frac{x}{2}[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x+p=x+k\times 4\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x+p=x[4\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow p=k\times 4\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow p=0[4\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

donc *f* est 4π - périodique



4) $f(x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$

Détermination l'ensemble de définition de *f*.

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction *f* :

$$f(-x)=\sin^2(-x)\times\cos(-2x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)=f(x)$$ donc *f* est paire.

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$$f(x+p)=f(x)$$
$$\Leftrightarrow \sin^2(x+p)\times\cos(2(x+p))=\sin^2(x)\times\cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \sin^2(x+p)\times\cos(2x+2p)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$$

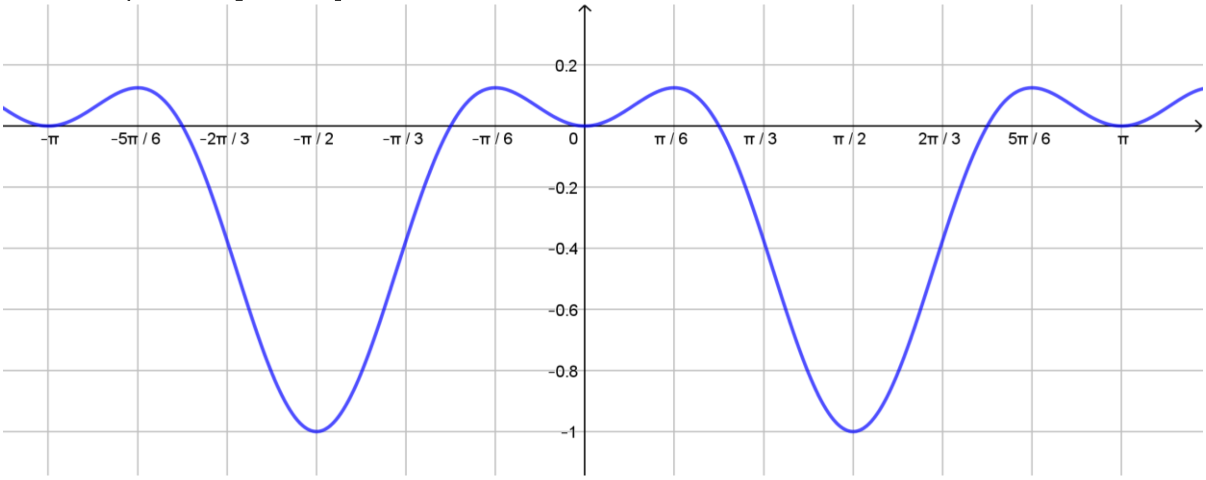
La relation $\cos(2x+2p)=\cos(2x)$ pour tout réel *x* donne :

$$2x+2p=2x+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2p=2x[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 2p=k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 2p=0[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow p=k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad p=0[\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

La relation $\sin^2(x+p)=\sin^2(x)$ et la relation $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$ pour tout réel *x* donnent :

$$x+p=x+k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x+p=x[\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow p=k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad p=0[\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

donc *f* est π - périodique.

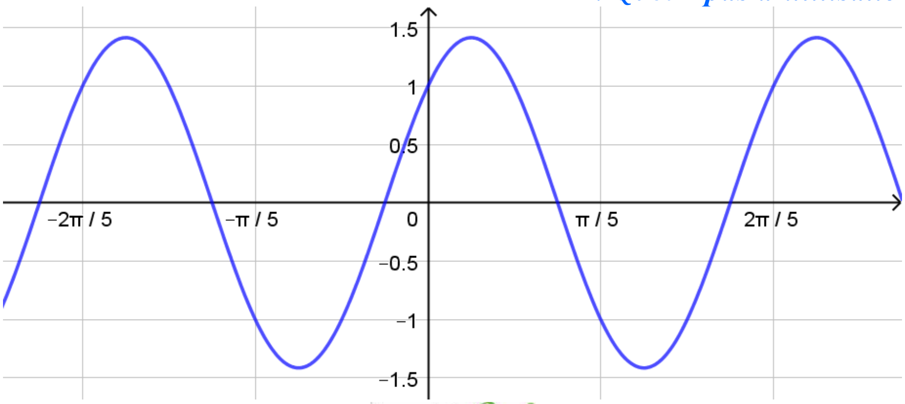


La Merci MONTPELLIER

Exercice 2A.3 : $f(x)=\sin 5x+\cos 5x$

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$$f(x+p)=f(x)$$
$$\Leftrightarrow \sin(5(x+p))+\cos(5(x+p))=\sin 5x+\cos 5x$$
$$\Leftrightarrow \sin(5x+5p)+\cos(5x+5p)=\sin 5x+\cos 5x$$
$$\Leftrightarrow 5x+5p=5x+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 5x+5p=5x[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 5p=k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 5p=0[2\pi]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow p=k\times\frac{2\pi}{5}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad p=0\left[\frac{2\pi}{5}\right]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$ $\to f$ est périodique de période $\frac{2\pi}{5}$



Exercice 2A.4 : $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\cos x}{\cos 2x}$

1) Domaine de définition : il suffit que le dénominateur soit non nul, soit :

$$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{2\pi}{2}\right] \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{2\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4}[\pi] \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$$

$$D_f = \mathbb{R} / \left\{\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$$

2) **.** étude de la parité :

Le domaine de définition est symétrique par rapport à 0.

$$f(-x)=\dfrac{\sin^2(-x)-\cos(-x)}{\cos(-2x)}=\dfrac{\sin^2 x-\cos x}{\cos 2x}=f(x)$$ donc ***f*** **est paire**

. étude de la périodicité :

Soit p la période cherchée, pour tout réel x :

$$f(x+p)=f(x)$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2(x+p)-\cos(x+p)}{\cos(2(x+p))}=\dfrac{\sin^2 x-\cos x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2(x+p)-\cos(x+p)}{\cos(2x+2p)}=\dfrac{\sin^2 x-\cos x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow x+p=x+k\times 2\pi \ , \ k\in\mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow x+p=x[2\pi] \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow p=k\times 2\pi \ , \ k\in\mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow p=0[2\pi] \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

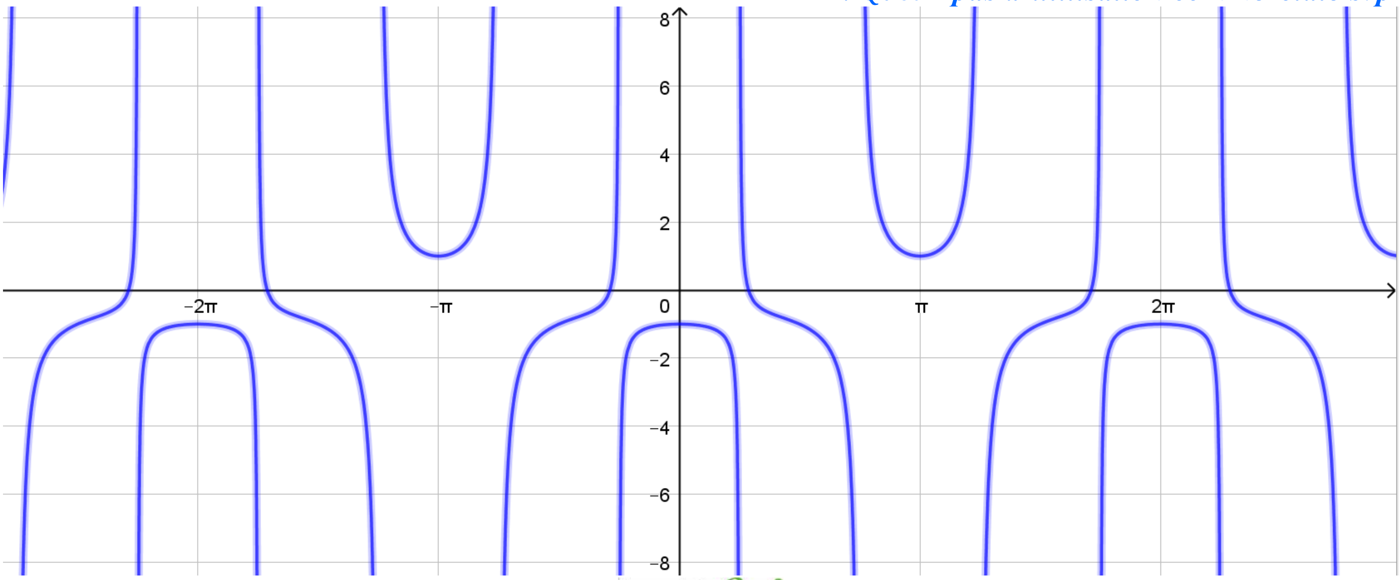
donc *f* est 2π - périodique car l'autre relation :

$$2x+2p=2x+k\times 2\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

donne une période égale à π qui est un diviseur de la période précédemment obtenue.

donc ***f*** **est périodique de période 2π**

. Remarque : compte tenu de la parité et de la périodicité de *f* , on peut l'étudier sur I $=[0;\pi]$



Exercice 2A.5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\cos(3x)\times\cos(4x)$

Etudier la parité et la périodicité éventuelles de f

Etude de la parité de la fonction *f* :

$$f(-x)=\cos(-3x)\times\cos(-4x)=\cos(3x)\times\cos(4x)=f(x)$$ donc *f* est paire.

Etude de la périodicité de la fonction *f* :

Soit *p* la période cherchée, pour tout réel *x* :

$$f(x+p)=f(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(3(x+p))\times\cos(4(x+p))=\cos(3x)\times\cos(4x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x+3p)\times\cos(4(x+p))=\cos(3x)\times\cos(4x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+3p=3x+k\times2\pi\\4x+4p=4x+k\times2\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3p=k\times2\pi\\4p=k\times2\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}p=k\times\dfrac{2\pi}{3}\\p=k\times\dfrac{2\pi}{4}\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

La période cherchée est le plus petit multiple commun de $\frac{2\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \ldots$

$\rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \ldots$

La fonction *f* est 2π - périodique.

M. Quet – ***pas d'utilisation commerciale svp***