RAPPEL : dérivées des fonctions circulaires et de composées de fonctions circulaires

fonction :	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos(u(x))$	$f(x)=\sin(u(x))$
fonction dérivée :	$f'(x)=-\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f'(x)=-u'(x)\sin(u(x))$	$f'(x)=u'(x)\cos(u(x))$

Exercice 2B.1 :

Dériver les fonctions suivantes définies sur leur domaine de définition :

a) $f(x)=\sqrt{x}\times\cos(2x)$ avec $D_f=]0;+\infty[$

b) $f(x)=\cos^2(x)\times\sin^2(x)$ avec $D_f=\mathbb{R}$

c) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x}$ avec $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

d) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ avec $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2x^3}$ avec $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

Exercice 2B.2 :

Dériver les fonctions suivantes définies sur leur domaine de définition :

a) $f(x)=\cos(2x+3)\times\sin(5x-7)$ avec $D_f=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ sur $I=]0;1[$

c) $f(x)=e^{\sin(5-2x)}$ avec $D_f=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\ln\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ sur $I=]0;\pi[$

e) $f(x)=[\sin(2x-5)]^2$

f) $g(x)=(2x^2+4)\times\cos(3x-5)$

g) $h(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}$

Exercice 2B.1 :

Dériver les fonctions suivantes définies sur leur domaine de définition :

a) $f(x)=\sqrt{x}\times\cos(2x)$ avec $D_f=]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(2x)+\sqrt{x}\times(-2)\sin(2x)=\frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin(2x)$$

b) $f(x)=\cos^2(x)\times\sin^2(x)$ avec $D_f=\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos(x)\times(-\sin(x))\times\sin^2(x)+\cos^2(x)\times2\sin(x)\times\cos(x)\\&=2\sin(x)\times\cos(x)\left[-\sin^2(x)+\cos^2(x)\right]\\&=\sin(2x)\left[\cos^2(x)-1+\cos^2(x)\right]\\&=\sin(2x)\left[2\cos^2(x)-1\right]\\&=\sin(2x)\times\cos(2x)\\&=\frac{1}{2}\sin(4x)\end{aligned}$$

Autre méthode : $f(x)=\cos^2(x)\times\sin^2(x)=\left[\cos(x)\times\sin(x)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2$

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\times\left(\frac{1}{2}\times2\cos(2x)\right)=\sin(2x)\times\cos(2x)=\frac{1}{2}\sin(4x)$$

c) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x}$ avec $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$$f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$$

d) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ avec $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x)=\frac{-\sin x\times\sin x-\cos x\times\cos x}{(\sin x)^2}=\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{(\sin x)^2}$$

e) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2x^3}$ avec $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$$f'(x)=\frac{\cos x\times2x^3-\sin x\times6x^2}{\left(2x^3\right)^2}=\frac{x^2(2x\cos x-6\sin x)}{4x^6}=\frac{2x\cos x-6\sin x}{4x^4}$$

Exercice 2B.2 :

Dériver les fonctions suivantes définies sur leur domaine de définition :

a) $f(x)=\cos(2x+3)\times\sin(5x-7)$ avec $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=-2\sin(2x+3)\times\sin(5x-7)+\cos(2x+3)\times5\cos(5x-7)$$

b) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ sur $I=]0;1[$

On pose $u(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ donc : $u'(x)=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Ainsi : $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\cos\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

c) $f(x)=e^{\sin(5-2x)}$ avec $D_f=\mathbb{R}$

On pose $u(x)=\sin(5-2x)$ donc : $u'(x)=-2\cos(5-2x)$

Ainsi : $f'(x)=-2\cos(5-2x)e^{\sin(5-2x)}$

d) $f(x)=\ln\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ sur $I=]0;\pi[$

On pose $u(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc : $u'(x)=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ainsi : $f'(x)=\dfrac{-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}=-\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $f(x)=\left[\sin(2x-5)\right]^2$

$$f'(x)=2\sin(2x-5)\times 2\cos(2x-5)=4\sin(2x-5)\cos(2x-5)=2\sin(4x-10)$$

f) $g(x)=\left(2x^2+4\right)\times\cos(3x-5)$

$$g'(x)=4x\cos(3x-5)+\left(2x^2+4\right)\times\left[-3\sin(3x-5)\right]$$
$$=4x\cos(3x-5)-6\left(x^2+2\right)\sin(3x-5)$$

g) $h(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}$

$$h'(x)=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\cos x)-(\sin x+\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-\sin x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$$