Etude complète de fonctions circulaires

Exercice 3A.1 :

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur I puis étudier le signe de $f'(x)$ sur I.
En déduire les variations de la fonction f.

1) $f(x) = 3 + \sin 2x$, $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $I = \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

3) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3A.2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

1) Montrer que f est impaire
2) Montrer que f est périodique de période 4π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f
3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;2\pi]$.
4) Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.
5) Dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $[-2\pi;6\pi]$.
(on indiquera les transformations utilisées)

Exercice 3A.3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$

1) Montrer que f est paire
2) Montrer que f est périodique de période π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
4) Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
5) Dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$
(on indiquera les transformations utilisées)

Exercice 3A.4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{3}{4}\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1) Etudier la parité de la fonction f.
2) Montrer que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
4) Etablir le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 3A.5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \frac{\pi}{5}\cos(2\pi x)$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f(n)$.

1) Prouver que la suite (u_n) est croissante.
2) La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}^+$?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 3A.1 :

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur I puis étudier le signe de $f'(x)$ sur I.

En déduire les variations de la fonction f.

1) $f(x)=3+\sin 2x$, $\text{I}=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)=2\cos 2x$, or si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors : $2x\in[0;\pi]$, ainsi :

si $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$: $f'(x)\geq 0$ et la fonction f est croissante ;

si $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x)\leq 0$ et la fonction f est décroissante.

2) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $\text{I}=\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

$f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, or si $x\in[0;\pi]$, alors : $\sin x\geq 0$

si $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $f'(x)\geq 0$ et la fonction f est croissante ;

si $x\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$: $f'(x)\leq 0$ et la fonction f est décroissante.

3) $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\text{I}=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Exercice 3A.2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\frac{x}{2}$

1) *Montrer que f est impaire.*

$$f(-x)=\sin\frac{-x}{2}=-\sin\frac{x}{2}=-f(x)$$

donc ***f* est impaire** ; on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

2) *Montrer que f est périodique de période 4π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f.*

Soit p la période cherchée de la fonction f :

$$f(x+p)=f(x)$$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x+p}{2}=\sin\frac{x}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \frac{x+p}{2}=\frac{x}{2}+k\times 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow \frac{x+p}{2}=\frac{x}{2}[2\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x+p=x+k\times 4\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow x+p=x[4\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow p=k\times 4\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ $\quad\Leftrightarrow p=0[4\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$

$f(x+4\pi)=\sin\frac{x+4\pi}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{x}{2}=f(x)$ donc ***f* est périodique de période 4π** ;

on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 4π , par exemple : $[-2\pi;2\pi]$.

Ainsi grâce à la parité et à la périodicité de f, on en déduit l'intervalle d'étude : $\mathrm{I}=[0;2\pi]$.

3) *Dresser le tableau de variation de f sur $[0;2\pi]$.*

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

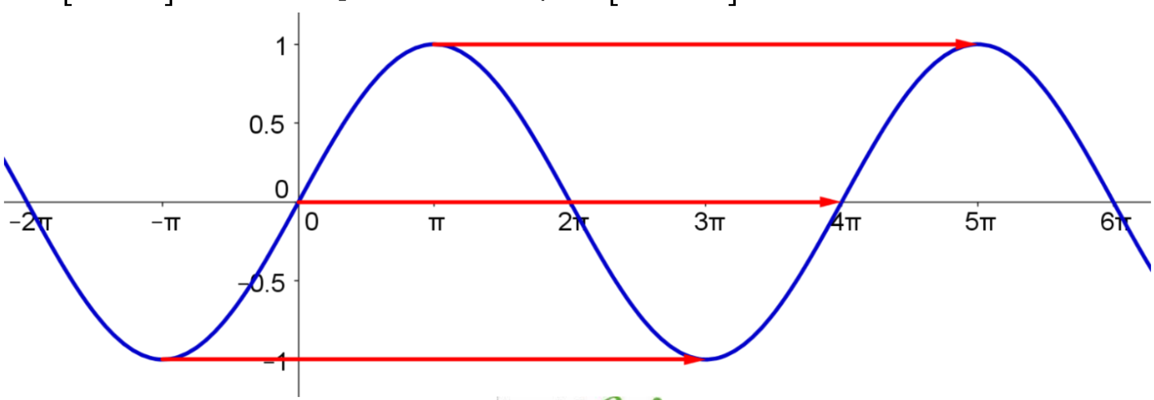
Si $x\in[0;2\pi]$ alors $\frac{x}{2}\in[0;\pi]$ or si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $\cos x\geq 0$ et si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $\cos x\leq 0$

x	0		π		2π
$f'(x)$					
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) Dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

5) Dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $[-2\pi;6\pi]$.

f est impaire donc C est symétrique par rapport à l'origine O du repère ; on en déduit C sur $[-2\pi;0]$ et f est périodique de période 4π donc par translation de vecteur $4\pi\vec{i}$, on en déduit C sur $[2\pi;6\pi]$. Voici la représentation de f sur $[-2\pi;6\pi]$:



Exercice 3A.3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos 2x$

1) *Montrer que f est paire.*

$$f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$$

donc f est paire ; on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

2) *Montrer que f est périodique de période π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f.*

$$f(x+\pi)=\cos[2(x+\pi)]=\cos[2x+2\pi]=\cos 2x=f(x)$$

donc $\boldsymbol{f}$ **est périodique de période π** ; on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π ,

soit par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f, on en déduit l'intervalle d'étude : $\mathrm{I}=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) *Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.*

La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=-2\sin 2x$, donc

Si $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2x \in [0;\pi]$, ainsi : $\sin 2x \geq 0$

On en déduit que $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) \leq 0$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f	1 ↘	0 ↘	-1

4) Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

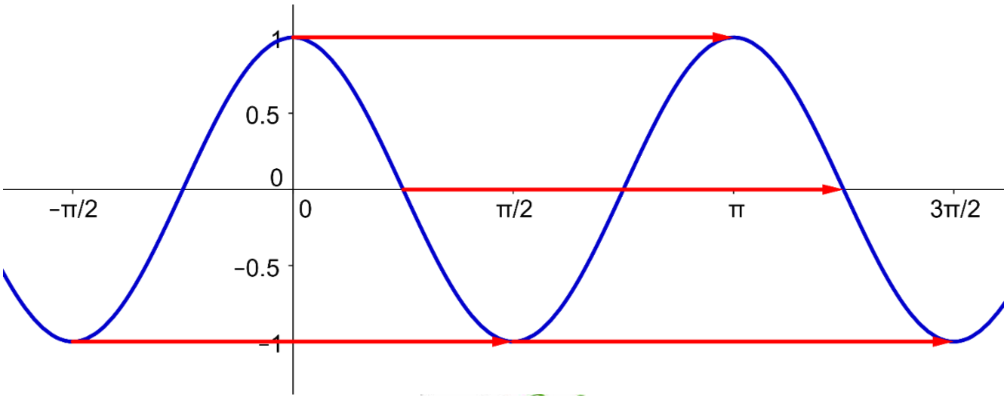
5) Dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

f est paire donc C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

→on en déduit C sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$

f est périodique de période π donc par translation de vecteur $\pi\vec{i}$, on en déduit C sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

d'où la représentation de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$:



<u>Exercice 3A.4 :</u> *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par* $f(x)=\dfrac{3}{4}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1) *Etudier la parité de la fonction f.*

$$f(-x)=\frac{3}{4}\cos\left(3(-x)+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(-3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

La fonction f n'est ni paire, ni impaire.

2) *Montrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.*

Soit p la période cherchée :

$$f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow \frac{3}{4}\cos\left(3(x+p)+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x+3p+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Cette relation étant vrai pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on doit avoir :

$$3x+3p+\frac{\pi}{6}=3x+\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3p=k\times 2\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \quad p=k\times\frac{2\pi}{3} \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

3) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\frac{3}{4}\times(-3)\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-9}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+\frac{\pi}{6}=0+k\times\pi \quad\Leftrightarrow\quad 3x=-\frac{\pi}{6}+k\times\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{18}+k\times\frac{\pi}{3} \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

4) *Etablir le tableau de variation de* f *sur* $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, la dérivée ne s'annule deux fois :

Si $k=0$: $\quad -\dfrac{\pi}{18}+0\times\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{18}\notin\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Si $k=1$: $\quad -\dfrac{\pi}{18}+1\times\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{6\pi}{18}=\dfrac{5\pi}{18}\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Si $k=2$: $\quad -\dfrac{\pi}{18}+2\times\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{12\pi}{18}=\dfrac{11\pi}{18}\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

La fonction dérivée f' est continue, pour connaître son signe, on étudie quelques valeurs simples

$$f'(0)=\frac{-9}{4}\sin\left(3\times 0+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{9}{8}<0$$
$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-9}{4}\sin\left(3\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{9}{8}<0$$
$$f'\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{-9}{4}\sin\left(3\times\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-9}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\frac{9}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{8}>0$$

Ainsi : si $x\in\left[\dfrac{5\pi}{18};\dfrac{11\pi}{18}\right]$: $f'(x)>0$ et la fonction f est croissante ;

Ainsi : si $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{18}\right]\cup\left[\dfrac{11\pi}{18};\dfrac{2\pi}{3}\right]$: $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante.

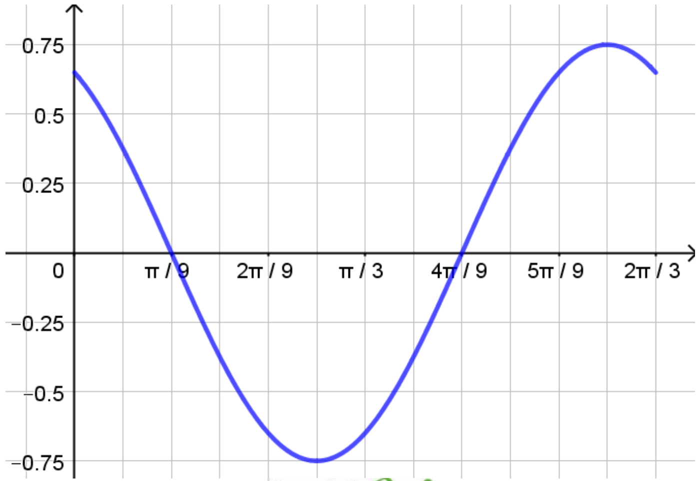
x	0		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{11\pi}{18}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$0,65$	$\searrow$	$-0,75$	$\nearrow$	$0,75$	$\searrow$	$0,65$

$$f(0)=\frac{3}{4}\cos\left(3\times 0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\simeq 0,65$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(3\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\simeq 0,65$$

$$f\left(\frac{5\pi}{18}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(3\times\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos(\pi)=-0,75$$

$$f\left(\frac{11\pi}{18}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(3\times\frac{11\pi}{18}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos(2\pi)=0,75$$



Exercice 3A.5 :

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x)=x-\frac{\pi}{5}\cos(2\pi x)$ *et* (u_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_n=f(n)$.

1) *Prouver que la suite* (u_n) *est croissante.*

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=(n+1)-\frac{\pi}{5}\cos(2\pi(n+1))-\left[n-\frac{\pi}{5}\cos(2\pi n)\right]$$
$$=n+1-\frac{\pi}{5}\cos(2\pi n+2\pi)-n+\frac{\pi}{5}\cos(2\pi n)$$
$$=1-\frac{\pi}{5}\cos(2\pi n)+\frac{\pi}{5}\cos(2\pi n)$$
$$=1$$

La suite (u_n) est arithmétique de raison positive égale à 1, donc elle est croissante.

2) *La fonction* f *est-elle croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *?*

Etude de la dérivée :

$$f'(x)=1-\frac{\pi}{5}(-2\pi)\sin(2\pi x)=1+\frac{2\pi^2}{5}\sin(2\pi x)$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1+\frac{2\pi^2}{5}\sin(2\pi x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\pi^2}{5}\sin(2\pi x)>-1 \Leftrightarrow \sin(2\pi x)>-\frac{5}{2\pi^2}$$
$$\Leftrightarrow \sin(2\pi x)>-0,2533$$
$$\Leftrightarrow \sin(2\pi x)>-0,2533$$

Avec geogebra, on trouve des valeurs solutions montrant que la fonction dérivée f' peut être négative, et la fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^+$.