Equations trigonométriques

Exercice 4A.1 : Résoudre les équations suivantes $]-\pi;\pi]$:

a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

b) $4\cos^2 x - 3 = 0$

c) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4\sin^2 x - 2 = 0$

Exercice 4A.2 : Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.

1) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

2) $\sin(t) = \dfrac{-1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

3) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ sur $]-\pi;\pi]$

4) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi[$

Exercice 4A.3 : Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.

1) $\cos^2(2t) = \dfrac{3}{4}$ sur $]-\pi;\pi]$

2) $\sin^2(3t) = \dfrac{3}{4}$ sur $]-\pi;\pi]$

Exercice 4A.4 : Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.

1) $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$

2) $\sin(2t) = \cos\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$ sur $]-\pi;\pi]$

3) $\cos(3t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)$ sur $]-\pi;\pi]$

Exercice 4A.5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$
2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
3) $2\cos^3 x + 5\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$
4) $2\cos^2 x - \cos x = 0$

Exercice 4A.6 : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$, dans $[0;\pi]$, et dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$:

1) $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$
2) $\sin(3x) = \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$
3) $\cos(5x) = -1$
4) $\sin x = \cos x$

Exercice 4A.7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$

1) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos 3x = \sin\dfrac{\pi}{8}$

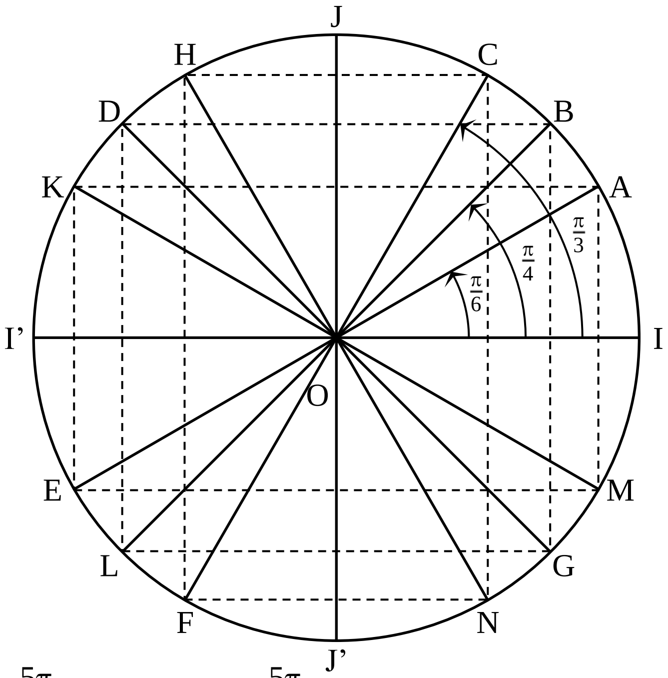
Exercice 4A.8 : Résoudre les équations suivantes dans $]-\pi;\pi]$:

a) $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right) = \sin x$

Exercice 4A.1 :

Résoudre les équations suivantes sur $]-\pi;\pi]$:



a) $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Soit $x = \frac{2\pi}{3} + k\times 2\pi$, soit $x = -\frac{2\pi}{3} + k\times 2\pi$

Les points H et F donnent : $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $4\cos^2 x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit $x = \frac{\pi}{6} + k\times 2\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{6} + k\times 2\pi$, soit $x = \frac{5\pi}{6} + k\times 2\pi$, $x = -\frac{5\pi}{6} + k\times 2\pi$

Les points A, G, K et L donnent : $S = \left\{\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right\}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Soit $x = -\frac{\pi}{3} + k\times 2\pi$, soit $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k\times 2\pi = \frac{4\pi}{3} + k\times 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + k\times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{-\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right\}$

d) $4\sin^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$

Soit $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les points B, D, L et G donnent : $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Autre méthode :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$:

soit $x = \frac{\pi}{4} + k\times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, soit $x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\times 2\pi = \frac{3\pi}{4} + k\times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$:

soit $x = -\frac{\pi}{4} + k\times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, soit $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\times 2\pi = \frac{5\pi}{4} + k\times 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + k\times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice 4A.2 : *Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.*

1) $\cos(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Soit $\cos(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi\right) \Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Soit $\cos(t)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi\right) \Leftrightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $S=\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

2) $\sin(t)=-\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

Soit $\sin(t)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\right)c \Leftrightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Soit $\sin(t)=\sin\left(\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+k\times 2\pi\right) \Leftrightarrow t=\dfrac{7\pi}{6}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=-\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Sur $\mathbb{R}$: $S=\left\{-\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi;-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

3) $\cos(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ sur $]-\pi;\pi]$

Pour tout réel t : $-1\le\cos(t)\le 1$ or $\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1$

Sur $]-\pi;\pi]$: $\cos(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution : $S=\varnothing$

4) $\cos(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi[$

Soit $\cos(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\right) \Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Soit $\cos(t)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\right) \Leftrightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Sur $[0;2\pi[$: $S=\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right\}$

Exercice 4A.3 : *Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.*

1) $\cos^2(2t)=\dfrac{3}{4}$ sur $]-\pi;\pi]$

Soit $\cos(2t)=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\cos(2t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

<u>1^er^ cas</u> : $\cos(2t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2t)=\cos\dfrac{\pi}{6}$

Soit $2t=\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\right)=\dfrac{\pi}{12}+k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$, on obtient $\dfrac{\pi}{12}$ et pour $k=-1$, on obtient $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{12\pi}{12}=-\dfrac{11\pi}{12}$

Soit $2t=-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\right)=-\dfrac{\pi}{12}+k\times\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$, on obtient $-\dfrac{\pi}{12}$ et pour $k=1$, on obtient $-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{12\pi}{12}=\dfrac{11\pi}{12}$

2ème cas : $\cos(2t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2t)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Soit $2t=\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi\right)=\dfrac{5\pi}{12}+k\times\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$, on obtient $\dfrac{5\pi}{12}$ et pour $k=-1$, on obtient $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{12\pi}{12}=-\dfrac{7\pi}{12}$

Soit $2t=-\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi\right)=-\dfrac{5\pi}{12}+k\times\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$, on obtient $-\dfrac{5\pi}{12}$ et pour $k=1$, on obtient $-\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{12\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}$

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{\dfrac{\pi}{12};-\dfrac{11\pi}{12};-\dfrac{\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{5\pi}{12};-\dfrac{7\pi}{12};-\dfrac{5\pi}{12};\dfrac{7\pi}{12}\right\}$

2) $\sin^2(3t)=\dfrac{3}{4}$ sur $]-\pi;\pi]$

Soit $\sin(3t)=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\sin(3t)=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1er cas : $\sin(3t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(3t)=\sin\dfrac{\pi}{3}$

Soit $3t=\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi\right)=\dfrac{\pi}{9}+k\times\dfrac{2\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$: $\dfrac{\pi}{9}$; pour $k=1$: $\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{6\pi}{9}=\dfrac{7\pi}{9}$; pour $k=-1$: $\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{6\pi}{9}=-\dfrac{5\pi}{9}$

Soit $3t=\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+k\times 2\pi \Leftrightarrow 3t=\dfrac{2\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2\pi}{3}+k\times 2\pi\right)=\dfrac{2\pi}{9}+k\times\dfrac{2\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$: $\dfrac{2\pi}{9}$; pour $k=1$: $\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{6\pi}{9}=\dfrac{8\pi}{9}$; pour $k=-1$: $\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{6\pi}{9}=-\dfrac{4\pi}{9}$

2ème cas : $\sin(3t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(3t)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Soit $3t=-\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi\right)=-\dfrac{\pi}{9}+k\times\dfrac{2\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$: $-\dfrac{\pi}{9}$; pour $k=1$: $-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{6\pi}{9}=\dfrac{5\pi}{9}$; pour $k=-1$: $-\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{6\pi}{9}=-\dfrac{7\pi}{9}$

Soit $3t=\left(\pi-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)+k\times 2\pi \Leftrightarrow 3t=\dfrac{4\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow 3t=-\dfrac{2\pi}{3}+k\times 2\pi$

$\Leftrightarrow 3t=-\dfrac{2\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2\pi}{3}+k\times 2\pi\right)=-\dfrac{2\pi}{9}+k\times\dfrac{2\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

→pour $k=0$: $-\dfrac{2\pi}{9}$; pour $k=1$: $-\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{6\pi}{9}=\dfrac{4\pi}{9}$; pour $k=-1$: $-\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{6\pi}{9}=-\dfrac{8\pi}{9}$

L'ensemble des solutions est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{9};\frac{7\pi}{9};-\frac{5\pi}{9};\frac{2\pi}{9};\frac{8\pi}{9};-\frac{4\pi}{9};-\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};-\frac{7\pi}{9};-\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9};-\frac{8\pi}{9}\right\}$$

soit $$S=\left\{-\frac{8\pi}{9};-\frac{7\pi}{9};-\frac{5\pi}{9};-\frac{4\pi}{9};-\frac{2\pi}{9};-\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{9};\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9};\frac{8\pi}{9}\right\}$$

Exercice 4A.4 : *Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.*

1) $\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$

Soit $t+\frac{\pi}{4}=2t+k\times 2\pi \iff -t=-\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi \iff t=\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Soit $t+\frac{\pi}{4}=-2t+k\times 2\pi \iff 3t=-\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi \iff t=-\frac{\pi}{12}+k\times\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

pour $k=0$: $t=-\frac{\pi}{12}$; pour $k=1$: $t=-\frac{\pi}{12}+1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$; pour $k=-1$: $t=-\frac{\pi}{12}-1\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{9\pi}{12}$

sur $\mathbb{R}$: $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi;-\frac{\pi}{12}+k\times 2\pi;\frac{7\pi}{12}+k\times 2\pi;-\frac{3\pi}{4}+k\times 2\pi\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin(2t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \iff \cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)=\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$ sur $]-\pi;\pi]$

Soit $\frac{\pi}{2}-2t=t-\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \iff -3t=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi \iff -3t=-\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi \iff t=\frac{5\pi}{18}-k\times\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

Soit $\frac{\pi}{2}-2t=-\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+k\times 2\pi \iff -t=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi \iff -t=-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \iff t=\frac{\pi}{6}-k\times 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Sur $]-\pi;\pi]$: $S=\left\{\frac{-7\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{17\pi}{18};\frac{\pi}{6}\right\}$

3) $\cos(3t)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right) \iff \cos(3t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right) \iff \cos(3t)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+t\right)$ sur $]-\pi;\pi]$

Soit $3t=\frac{\pi}{6}+t+k\times 2\pi \iff 2t=\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \iff t=\frac{\pi}{12}+k\times\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

pour $k=0$: $t=\frac{\pi}{12}$; pour $k=-1$: $t=\frac{\pi}{12}-1\times\pi=-\frac{11\pi}{12}$

Soit $3t=-\left(\frac{\pi}{6}+t\right)+k\times 2\pi \iff 4t=-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \iff t=-\frac{\pi}{24}+k\times\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

pour $k=0$: $t=-\frac{\pi}{24}$; pour $k=1$: $t=-\frac{\pi}{24}+1\times\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{24}$; pour $k=2$: $t=-\frac{\pi}{24}+2\times\frac{\pi}{2}=\frac{23\pi}{24}$

pour $k=-1$: $t=-\frac{\pi}{24}-1\times\frac{\pi}{2}=-\frac{13\pi}{24}$

Sur $]-\pi;\pi]$: $S=\left\{\frac{\pi}{12};-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{24};\frac{11\pi}{24};\frac{23\pi}{24};-\frac{13\pi}{24}\right\}$

Exercice 4A.5 :

1) $\sin^2 x-5\sin x+6=0$: on effectue un changement de variables, on pose $X=\sin x$

l'équation devient : $X^2-5X+6=0$

calcul du discriminant : $\Delta=(-5)^2-4\times 6=25-24=1=1^2$

les solutions sont : $X_1=\frac{-(-5)-1}{2}=\frac{4}{2}=2$ et $X_2=\frac{-(-5)+1}{2}=\frac{6}{2}=3$

or $X=\sin x$, donc soit $\sin x=2$, soit $\sin x=3$, ce qui est impossible donc $S=\varnothing$.

2) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$

on pose $X=\sin x$, l'équation devient : $2X^2-X-1=0$

calcul du discriminant : $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9=3^2$

les solutions sont : $X_1=\frac{-(-1)-3}{2\times 2}=\frac{1-3}{4}=\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{-(-1)+3}{2\times 2}=\frac{1+3}{4}=1$

or $X=\sin x$, donc :

soit $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$, ainsi :

soit $x = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, soit $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k \times 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

soit $\sin x = 1$, ainsi :

$x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont : $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi\,;\ \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi\,;\ \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$.

3) $2\cos^3 x + 5\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$: on pose : $X = \cos x$

on doit alors résoudre : $2X^3 + 5X^2 + X - 2 = 0$ → -1 est racine évidente, on factorise par $X + 1$

d'où par division :

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 + 5X^2 + X - 2 & X + 1 \\ \hline -\underline{(2X^3 + 2X^2)} & \\ 3X^2 + X & 2X^2 + 3X - 2 \\ -\underline{(3X^2 + 3X)} & \\ -2X - 2 & \\ -\underline{(-2X - 2)} & \\ 0 & \end{array}$$

donc on doit résoudre : $(X + 1)(2X^2 + 3X - 2) = 0$

calcul du discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 = 5^2$

les solutions sont : $X_1 = \frac{-3-5}{2\times 2} = \frac{-8}{4} = -2$ et $X_2 = \frac{-3+5}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

or $X = \cos x$, donc soit : $\cos x = -1$, soit $\cos x = -2$, soit $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k \times 2\pi$; $\cos x = -2$ n'a pas de solution

$\cos x = \frac{1}{2}$: soit $x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$

donc $S = \left\{\pi + k \times 2\pi\,;\ \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi\,;\ -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi\right\}$

4) $2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

Soit : $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Soit : $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

→ $x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

→ $x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2}[\pi]; \frac{\pi}{3}[2\pi]; -\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ et $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right\}$

Exercice 4A.6 :

1) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

Soit $3x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-x+k\times 2\pi \Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\times\frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\times\frac{\pi}{2}$

Soit $3x+\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+k\times 2\pi \Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+x+k\times 2\pi \Leftrightarrow 2x=0+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=k\times\pi$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{12}+k\times\frac{\pi}{2};k\times\pi\right\},k\in\mathbb{Z}$; $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12};0;\pi\right\}$; $S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left\{-\frac{5\pi}{12};0;\frac{\pi}{12}\right\}$

2) $\sin(3x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin(3x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow \sin(3x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

Soit $3x=\frac{2\pi}{3}-x+k\times 2\pi \Leftrightarrow 4x=\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\times\frac{\pi}{2}$

Soit $3x=\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+k\times 2\pi \Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{3}+x+k\times 2\pi \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\times\pi$

→ ces deux solutions se résument à $x=\frac{\pi}{6}+k\times\frac{\pi}{2}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{6}+k\times\frac{\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}$; $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right\}$; $S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right\}$

3) $\cos(5x)=-1 \Leftrightarrow \cos(5x)=\cos(\pi)$

Soit $5x=\pi+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{5}+k\times\frac{2\pi}{5}$

Soit $5x=-\pi+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{5}+k\times\frac{2\pi}{5}$

→ ces deux solutions se résument à $x=\frac{\pi}{5}+k\times\frac{2\pi}{5}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{5}+k\times\frac{2\pi}{5}\right\},k\in\mathbb{Z}$; $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{5};\frac{3\pi}{5};\pi\right\}$; $S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left\{-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{5}\right\}$

4) $\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Soit $x=\frac{\pi}{2}-x+k\times 2\pi \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\times\pi$

Soit $x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+x+k\times 2\pi \Leftrightarrow 0=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$: égalité impossible

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\times\pi\right\},k\in\mathbb{Z}$; $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; $S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice 4A.7 : *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *puis dans* $]-\pi;\pi]$

1) $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}$

soit $2x=\frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}[\pi]$, soit $2x=-\frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}[\pi]$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{12}[\pi] ; \frac{\pi}{12}[\pi] \right\} \quad \text{et} \quad S_{]-\pi;\pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} ; -\frac{11\pi}{12} \right\}$$

2) $\cos 3x = \sin\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Soit : $3x = \frac{3\pi}{8}[2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$, soit : $3x = -\frac{3\pi}{8}[2\pi] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right] ; \frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \right\} \quad \text{et} \quad S_{]-\pi;\pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{8} ; \frac{13\pi}{24} ; \frac{-19\pi}{24} ; \frac{\pi}{8} ; \frac{19\pi}{24} ; \frac{-13\pi}{24} \right\}$$

Exercice 4A.8 : *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *puis dans* $[-\pi;\pi[$

a) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

Soit $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit $x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow x = \pi[2\pi]$ → $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3}[2\pi] ; \pi[2\pi] \right\}$ et $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{ \frac{2\pi}{3} ; \pi \right\}$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \sin x$

Soit $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} = x[2\pi] \Leftrightarrow -\frac{x}{3} - x = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow -\frac{4x}{3} = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right)\left[2\pi\left(-\frac{3}{4}\right)\right] \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{16}\left[-\frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{16}\left[-\frac{3\pi}{2}\right]$

Soit $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} = \pi - x[2\pi] \Leftrightarrow -\frac{x}{3} + x = \pi - \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \times \frac{3}{2}\left[2\pi \times \frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{8}[3\pi] \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{8}[3\pi]$

→ $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{3\pi}{16}\left[-\frac{3\pi}{2}\right] ; -\frac{7\pi}{8}[3\pi] \right\}$ et $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{ \frac{3\pi}{16} ; -\frac{7\pi}{8} \right\}$