Problèmes sur la trigonométrie (Lycée d'adultes de Paris)

Exercice 5A.1 : Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=2\cos x-3x$.

a. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe. En déduire les variations de la fonction f.

b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0;\pi]$.

c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 5A.2 : *f* est la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Montrer que la fonction *f* est paire et déterminer sa période.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de *f* sur $[-\pi;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi;3\pi]$.

Exercice 5A.3 : *f* est la fonction définie par : $f(x)=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction *f*.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
4) Dresser le tableau de variation de *f* sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi;\pi]$.

Exercice 5A.4 : *f* est la fonction définie par : $f(x)=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction *f*.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0;2\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de *f* sur $[-2\pi;2\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-4\pi;4\pi]$.

Exercice 5A.5 : Vrai – Faux On justifiera chaque réponse.

f est la fonction définie sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$

- **Proposition 1 :** $\forall x\in I,\ f(x)\geq 0$
- **Proposition 2 :** $\forall x\in I,\ f'(x)=\sin(2x)\left(1-4\sin^2 x\right)$
- **Proposition 3 :** La fonction *f* est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$
- **Proposition 4 :** La fonction *f* est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{4};-\dfrac{\pi}{6}\right]$
- **Proposition 5 :** $\forall x\in I,\ f(x)\leq\dfrac{1}{8}$

Exercice 5A.6 : Etudier puis représenter graphiquement la fonction $f:x\mapsto\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

Exercice 5A.1 :

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=2\cos x-3x$.

a. *Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe. En déduire les variations de la fonction f.*

f est définie, continue et dérivable sur $[0;\pi]$:

$$f'(x)=-2\sin x-3$$

ainsi $f'(x)<0$ sur $[0;\pi]$ et la fonction f est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

b. *Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0;\pi]$.*

$f(0)=2$ et $f(\pi)=-2-3\pi$ et la fonction est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $[0;\pi]$. D'après le **TVI,** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0;\pi]$.

c. *Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.*

$$\boldsymbol{x_0 \approx 0,56}$$

Exercice 5A.2 :

f est la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$

1) *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

f est définie si $2+\cos x\neq 0$ soit $\cos x\neq -2$. Or pour tout réel *x*, $\cos x\geq -1$, donc $D_f=\mathbb{R}$.

2) *Montrer que la fonction f est paire et déterminer sa période.*

$f(-x)=\dfrac{2}{2+\cos(-x)}=\dfrac{2}{2+\cos x}=f(x)$ donc *f* est paire.

$\cos x$ est 2π - périodique : $f(x+2\pi)=\dfrac{2}{2+\cos(x+2\pi)}=\dfrac{2}{2+\cos x}=f(x)$ donc *f* est 2π - périodique

3) *Calculer la fonction dérivée f ' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0;\pi]$.*

f est dérivable en tant que composée de fonctions trigonométriques.

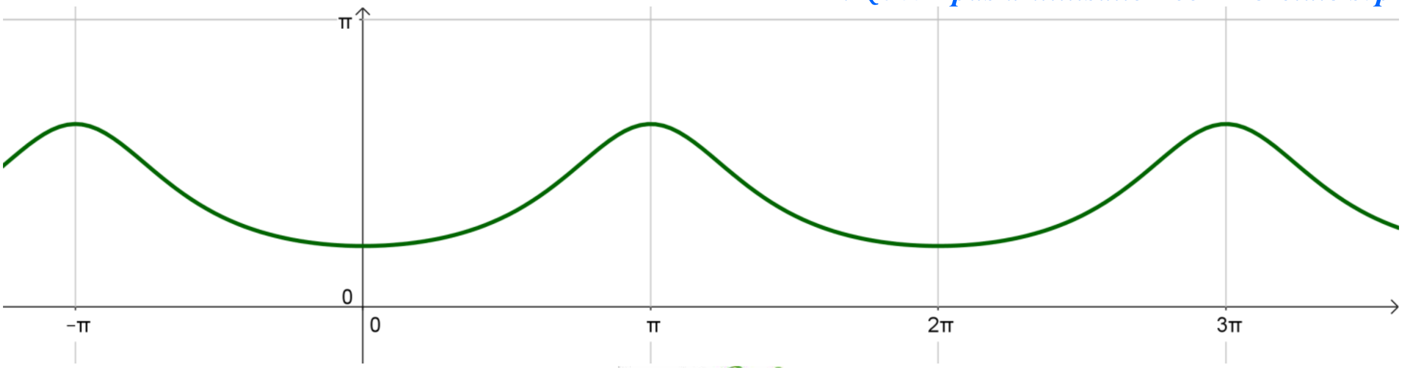
$$f'(x)=\frac{2\times(-(-\sin x))}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}.$$

Le dénominateur étant strictement positif et sin *x* étant positif sur l'intervalle $[0;\pi]$, la dérivée est positive sur $[0;\pi]$.

4) *Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi;3\pi]$.*

Par symétrie axiale, si la dérivée est positive sur $[0;\pi]$, elle est négative sur $[-\pi;0]$.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	2



Exercice 5A.3 :

f est la fonction définie par : $f(x) = \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1$

1) *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

   La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2) *Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f .*

   $f(-x) = \cos^2(-2x) + \cos(-2x) - 1 = \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1 = f(x)$ donc *f* est paire.

   Soit *p* la période cherchée.

   $$f(x+p) = f(x)$$
   $$\Leftrightarrow \cos^2(2(x+p)) + \cos(2(x+p)) - 1 = \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1$$
   $$\Leftrightarrow \cos^2(2x+2p) + \cos(2x+2p) = \cos^2(2x) + \cos(2x)$$

   Pour tout réel *x* :

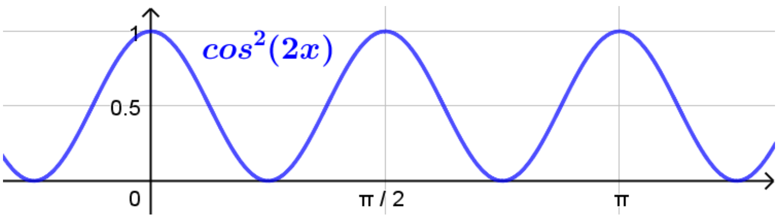
   $$\cos(2x+2p) = \cos(2x+2\pi) \Leftrightarrow 2x+2p = 2x+2\pi[2\pi] \Leftrightarrow 2p = 2\pi[2\pi] \Leftrightarrow p = \pi[\pi]$$

   $\cos^2(2x+2p) = \cos^2(2x)$: deux possibilités :

   → soit $\cos(2x+2p) = \cos(2x)$ qui est π-périodique,

   → soit $\cos(2x+2p) = -\cos(2x) = \cos(2x+\pi)$

   $$\Leftrightarrow 2x+2p = 2x+\pi[2\pi] \Leftrightarrow 2p = \pi[2\pi] \Leftrightarrow p = \frac{\pi}{2}[\pi]$$



   Le plus petit multiple commun des périodicités trouvées π et $\frac{\pi}{2}$ est π :

   f est π - périodique (et paire)

   On peut donc étudier la fonction *f* sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) *Calculer la fonction dérivée f ' et déterminer son signe sur l'intervalle* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

   f est dérivable en tant que composée de fonctions trigonométriques.

   $f(x) = \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1$

   $f'(x) = 2\times\cos(2x)\times(-2\sin(2x)) + (-2\sin(2x)) = 2\sin(2x)\times(-2\cos(2x) - 1)$.

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] : 2x \in [0;\pi] \text{ et } \sin(2x) \geq 0$$

$$-2\cos(2x)-1=0 \Leftrightarrow -2\cos(2x)=1 \Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{soit } 2x=\frac{2\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}[\pi] \text{ , soit } 2x=-\frac{2\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}[\pi]$$

x	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$-2\cos(2x)-1$	0	+	0		−		0		+		0

On trouve les signes en testant des valeurs :

$$-2\cos(2\times 0)-1=-2-1=-3$$

$$-2\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-1=-2\times(-1)-1=2-1=1$$

Autre méthode :

$$-2\cos(2x)-1>0 \Leftrightarrow -2\cos(2x)>1 \Leftrightarrow \cos(2x)<-\frac{1}{2}$$

or $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $2x \in [0;\pi]$, ainsi: $\cos(2x)<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

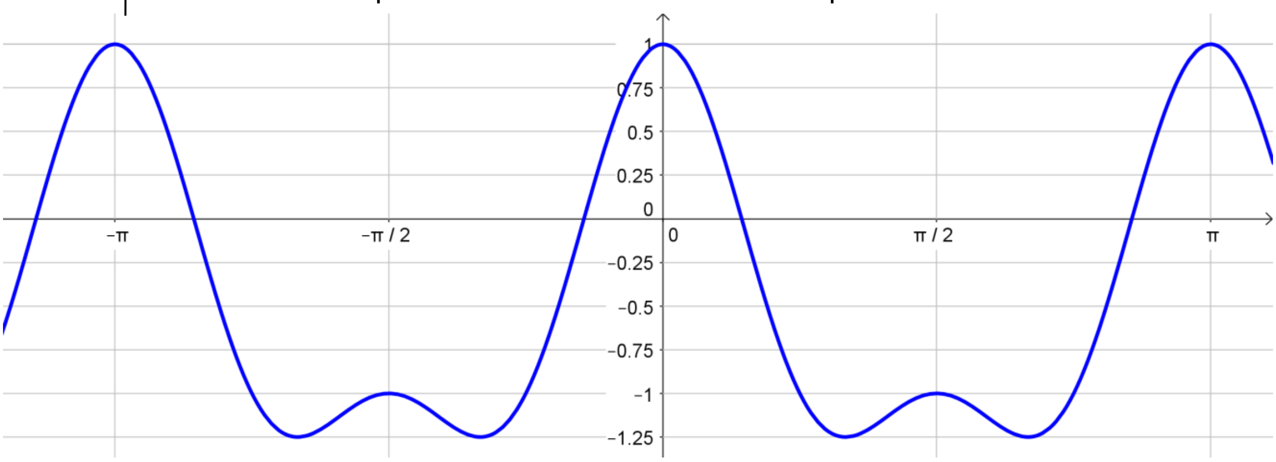
Ainsi :

si $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$: $f'(x) \leq 0$

si $x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) \geq 0$

4) *Dresser le tableau de variation de f sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *et tracer l'allure de la fonction sur* $[-\pi;\pi]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	-1



Exercice 5A.4 :

f est la fonction définie par : $f\left(x\right)=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$

1) *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) *Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f .*

$f\left(-x\right)=\left(1+\cos\dfrac{-x}{2}\right)\sin\dfrac{-x}{2}=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\left(-\sin\dfrac{x}{2}\right)=-f\left(x\right)$ donc *f* est impaire.

Le cosinus et le sinus sont 2π - périodique : $\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}\left[2\pi\right] \Leftrightarrow x=x\left[4\pi\right]$

$f\left(x+4\pi\right)=\left(1+\cos\dfrac{x+4\pi}{2}\right)\sin\dfrac{x+4\pi}{2}=\left(1+\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}=f\left(x\right)$

donc *f* est 4π - périodique

On peut donc étudier la fonction *f* sur l'intervalle $\left[0;2\pi\right]$.

3) *Calculer la fonction dérivée f ' et déterminer son signe sur l'intervalle* $\left[0;2\pi\right]$.

f est dérivable en tant que composée de fonctions trigonométriques.

$$f'\left(x\right)=\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}+\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1\right]$$

On pose $X=\cos\dfrac{x}{2}$, la dérivée devient : $2X^2+X-1$

$\Delta=1^2-4\times2\times\left(-1\right)=9=3^2$: deux solutions : $X_1=\dfrac{-1-3}{2\times2}=-1$ et $X_2=\dfrac{-1+3}{2\times2}=\dfrac{1}{2}$

Or $X=\cos\dfrac{x}{2}$ donc $\cos\dfrac{x_1}{2}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{2}=\pi\left[2\pi\right] \Leftrightarrow x_1=2\pi\left[4\pi\right]$

$\cos\dfrac{x_2}{2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x_2}{2}=\dfrac{\pi}{3}\left[2\pi\right] \Leftrightarrow x_2=\dfrac{2\pi}{3}\left[4\pi\right]$

ou $\dfrac{x_2}{2}=\dfrac{-\pi}{3}\left[2\pi\right] \Leftrightarrow x_2=-\dfrac{2\pi}{3}\left[4\pi\right]$ mais $-\dfrac{2\pi}{3}\notin\left[0;2\pi\right]$

La dérivée s'annule donc deux fois sur l'intervalle $\left[0;2\pi\right]$.

Pour déterminer son signe, on calcule quelques valeurs simples entre les racines de la dérivée car cette dérivée est une fonction continue :

$$f'\left(0\right)=\frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{0}{2}+\cos\frac{0}{2}-1\right]=\frac{1}{2}\left[2+1-1\right]=1 \quad \text{donc} \quad f'\left(0\right)>0$$

$$f'\left(\pi\right)=\frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-1\right]=-\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad f'\left(\pi\right)<0$$

Ainsi $f'\left(x\right)\geq0$ si $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et $f'\left(x\right)\leq0$ si $x\in\left[\dfrac{2\pi}{3};2\pi\right]$

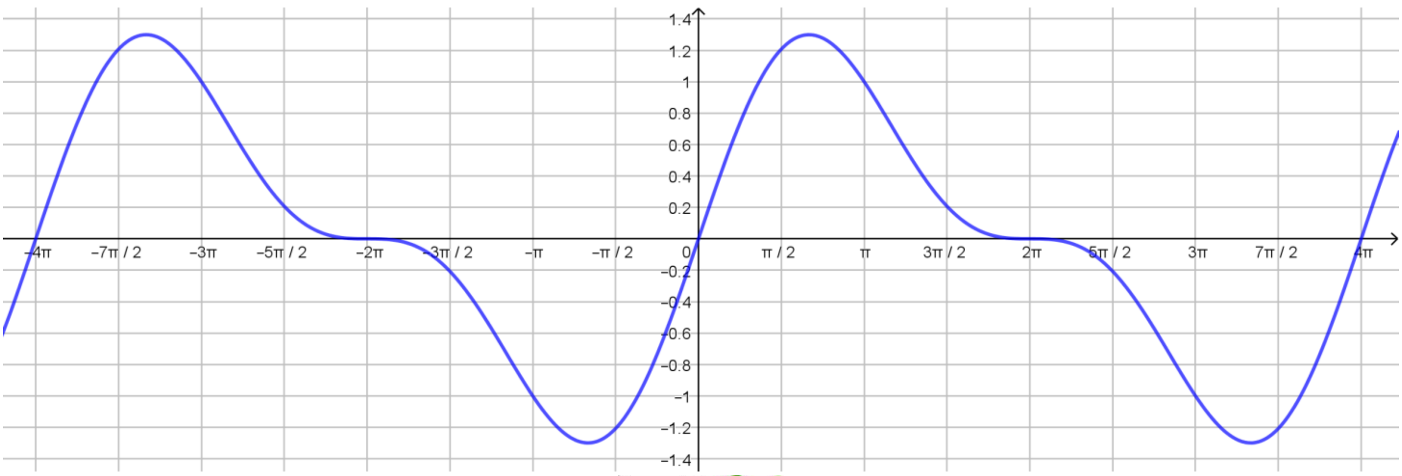
4) *Dresser le tableau de variation de f sur* $[-2\pi;2\pi]$ *et tracer l'allure de la fonction sur* $[-\pi;\pi]$.

x	-2π		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

$$f(2\pi)=\left(1+\cos\frac{2\pi}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{2}=0 \quad \text{et} \quad f(-2\pi)=\left(1+\cos\frac{-2\pi}{2}\right)\sin\frac{-2\pi}{2}=0$$

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\left(1+\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{2}=\left(1+\cos\frac{-\pi}{3}\right)\sin\frac{-\pi}{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\simeq-1,3$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(1+\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\simeq1,3$$



Exercice 5A.5 : Vrai - Faux

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse.

f est la fonction définie sur $I=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$

- **Proposition 1 :** $\forall x\in I$, $f(x)\geq 0$

  $\forall x\in I$, $\sin^2(x)\geq 0$.

  $\forall x\in I$, on a : $2x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; ainsi : $\cos(2x)\geq 0$

  Donc $f(x)\geq 0$ et la proposition 1 est **vraie**.

- **Proposition 2 :** $\forall x\in I$, $f'(x)=\sin(2x)\left(1-4\sin^2 x\right)$

  $\forall x\in I$, $f'(x)=2\sin(x)\cos(x)\times\cos(2x)+\sin^2(x)\times(-2\sin(2x))$

$$= \sin(2x)\times\cos(2x) - 2\sin^2(x)\times\sin(2x) = \sin(2x)\left[\cos(2x) - 2\sin^2(x)\right]$$

$$= \sin(2x)\left[1 - 2\sin^2(x) - 2\sin^2(x)\right] = \sin(2x)\left[1 - 4\sin^2(x)\right]$$

La proposition 2 est **vraie**.

- **Proposition 3 :** La fonction *f* est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$

Etude du signe de la dérivée sur $I = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc $2x = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin(2x) \geq 0 \iff 2x \in [0;\pi][2\pi] \iff x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right][\pi]$

$1 - 4\sin^2(x) \leq 0 \iff \sin^2(x) \geq \frac{1}{4} \iff \sin(x) \geq \frac{1}{2}$ ou $\sin(x) \leq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

Tableau de signe sur $I = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$:

x	$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$\sin(2x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-4\sin^2(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

La proposition 3 est **vraie**.

- **Proposition 4 :** La fonction *f* est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{6}\right]$ → La proposition 4 est **fausse**.

- **Proposition 5 :** $\forall x \in I,\ f(x) \leq \frac{1}{8}$

$f(-x) = \sin^2(-x)\times\cos(-2x) = \sin^2(x)\times\cos(2x) = f(x)$: la fonction *f* est paire.

$f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi)\times\cos(2(x+\pi)) = (-\sin(x))^2\times\cos(2x+2\pi) = \sin^2(x)\times\cos(2x) = f(x)$

La fonction *f* est π - périodique.

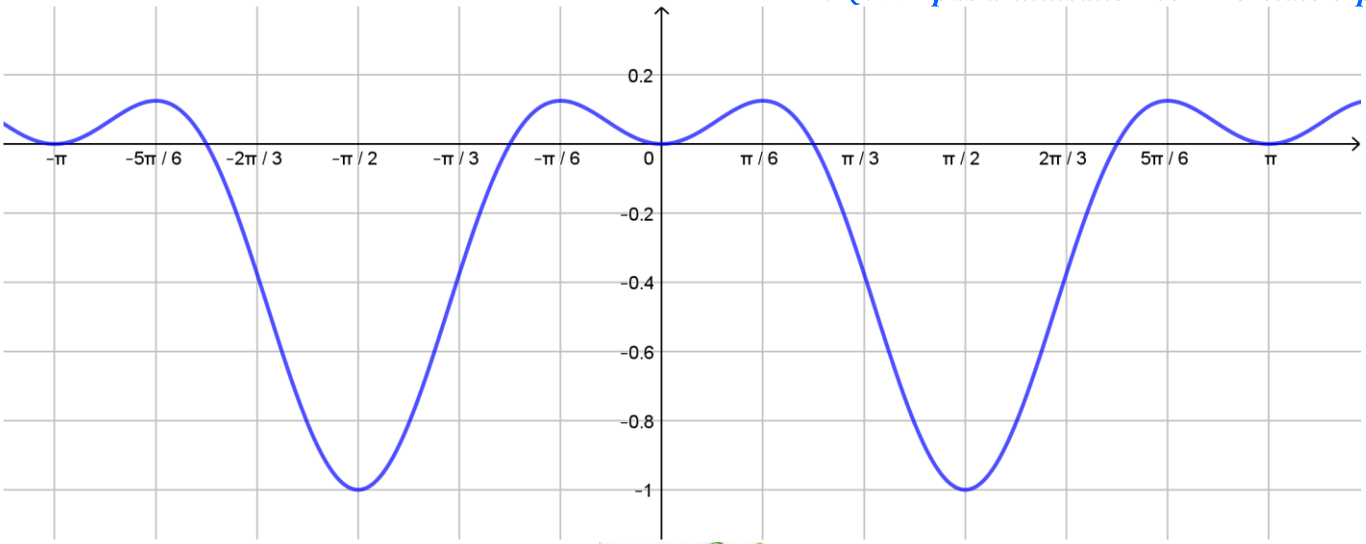
Donc on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ d'amplitude $\frac{\pi}{2}$.

Les maximum de la fonction f sont donc :

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(2\times\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Ainsi $\forall x \in I,\ f(x) \leq \frac{1}{8}$ et la proposition 4 est **vraie**.



Exercice 5A.6 :

Etudier puis représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

Parité : $f(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$

Donc f n'est ni paire ni impaire ; on ne peut donc pas restreindre l'intervalle d'étude

Périodicité : $f(x+\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2(x+\pi)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = f(x)$

donc ***f*** **est périodique de période π**

il suffit donc d'étudier f sur un intervalle d'amplitude π , soit **I** = $[0;\pi]$

Sens de variation :

f est dérivable sur $[0;\pi]$ en tant que composée de fonctions trigonométriques et polynômiales.

Pour tout x de I , $f'(x) = -2\times\left[-\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right] = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$$f'(x) \geq 0 \iff \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \geq 0 \iff 0 \leq \frac{\pi}{3} - 2x \leq \pi\,[2\pi]$$

$$\iff -\frac{\pi}{3} \leq -2x \leq \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\iff \frac{\pi}{6} \geq x \geq -\frac{\pi}{3}\,[\pi]$$

Ceci s'écrit aussi : $\frac{\pi}{6} + k\times\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{3} + k\times\pi \;, k \in \mathbb{Z}$

Sur $[0;\pi]$, pour $k = 0$: $f'(x) \geq 0 \iff \frac{\pi}{6} \geq x \geq -\frac{\pi}{3} \iff \frac{\pi}{6} \geq x \geq 0$

Sur $[0;\pi]$, pour $k = 1$: $f'(x) \geq 0 \iff \frac{\pi}{6} + \pi \geq x \geq -\frac{\pi}{3} + \pi \;, k \in \mathbb{Z} \iff \frac{7\pi}{6} \geq x \geq \frac{2\pi}{3}$

Ainsi : $f'(x) \geq 0$ si $x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$

$f'(x) \leq 0$ si $x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$

Tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

$$f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \qquad f(\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\times\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(0)=1$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\times\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos(-\pi)=-1$$

Courbe sur $[-\pi;\pi]$: