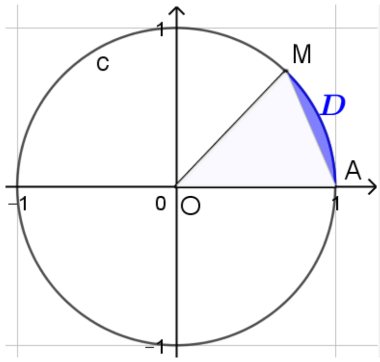
Problèmes de trigonométrie

Exercice 5B.1 :



Sur le cercle de centre O et de rayon 1, on place un point M tel que :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=x \text{ radians , avec } x\in[0;\pi].$$

On se propose de savoir s'il existe un point M tel que l'aire du triangle OAM et l'aire du lunule D soient égales.

1) a) Si l'aire du secteur angulaire $\widehat{OAM}$ est égale à $\dfrac{\text{angle}\times\text{rayon}^2}{2}=\dfrac{x}{2}$

montrer que l'aire de D est $\dfrac{x-\sin x}{2}$.

b) En déduire que le problème posé revient à résoudre l'équation : $x=2\sin x$.

2) On pose : $f(x)=x-2\sin x$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0;\pi]$.

3) Déduire du 2) qu'il existe une unique valeur x_0 non nulle dans $[0;\pi]$, donc un unique point M, qui répond au problème posé ; donner une valeur approchée de x_0.

Exercice 5B.2 : Polynésie septembre 2005

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=e^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ci-dessous. On considère également la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}$ et on nomme C sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C.

3) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

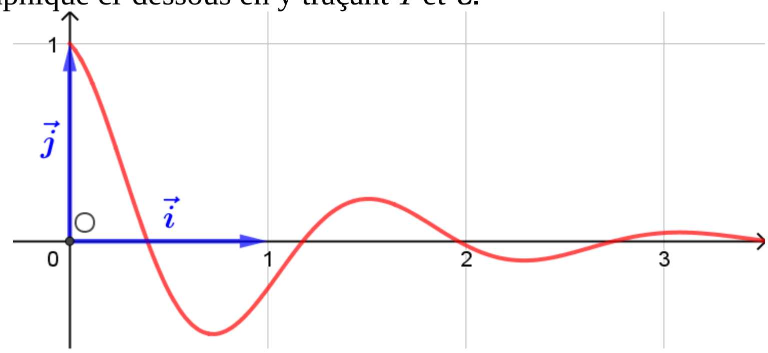
4) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right].$$

b) En déduire que les courbes Γ et C ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique ci-dessous en y traçant T et C.



Exercice 5B.3 :

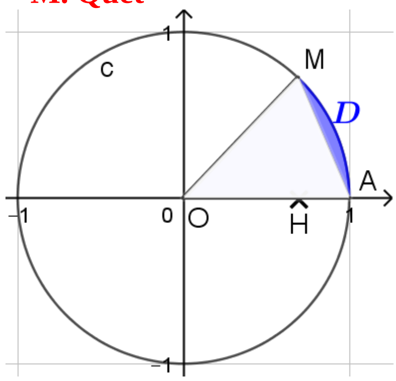
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+\sin 2x+2\cos x$.

1) Visualiser la courbe sur votre calculatrice et faites une conjecture sur la périodicité de la fonction f puis démontrer cette conjecture. On prendra comme fenêtre $x\in[-4;13]$, $y\in[-2;4]$ et comme graduations π sur les abscisses et 1 sur les ordonnées.
2) Montrer que l'on peut étudier la fonction f sur $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ puis montrer que :
   $f'(x)=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$.
3) Étudier les variations sur *I* puis dresser le tableau de variation sur *I*.
4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède exactement deux solutions dans *I* et donner un encadrement à 10^{-2} de chacune de ces solutions. On note α et β ces solutions avec $\alpha<\beta$.
5) En déduire les variations sur *I* de la fonction g définie par : $g(x)=2x-\cos 2x+4\sin x$.

Exercice 5A.1 :

Sur le cercle de centre O et de rayon 1, on place un point M tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=x \text{ radians , avec } x\in[0;\pi].$$



On se propose de savoir s'il existe un point M tel que l'aire du triangle OAM et l'aire du lunule D soient égales.

1) *a) Si l'aire du secteur angulaire $\widehat{\mathrm{OAM}}$ est égale à $\frac{x}{2}$, montrer que l'aire de D est $\frac{x-\sin x}{2}$.*

Soit A_D l'aire du secteur $\widehat{\mathrm{OAM}}$ privée de l'aire du triangle AOM.

L'aire du triangle AOM est : $A_{\mathrm{AOM}}=\frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{MH}}{2}$, où H est le pied de la hauteur issue de M.

Or $\mathrm{OA}=1$ et $\mathrm{MH}=\sin x$, d'où : $A_{\mathrm{AOM}}=\frac{\sin x}{2}$.

On obtient : $A_D=\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}=\frac{x-\sin x}{2}$.

b) En déduire que le problème posé revient à résoudre l'équation : $x=2\sin x$.

Le problème posé revient à résoudre : $A_D=A_{\mathrm{AOM}}$, soit :

$$\frac{x-\sin x}{2}=\frac{\sin x}{2} \iff x-\sin x=\sin x \iff x=2\sin x.$$

2) *On pose : $f(x)=x-2\sin x$.*

a) Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout $x\in[0;\pi]$: $f'(x)=1-2\cos x$.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0;\pi]$.

On résout :

$$1-2\cos x\geq 0 \iff -2\cos x\geq -1 \iff \cos x\leq\frac{1}{2}.$$

On identifie en priorité les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule sur $[0;\pi]$:

$$\cos x=\frac{1}{2} \iff x=\frac{\pi}{3}.$$

Ainsi : $\cos x\leq\frac{1}{2}$ si $x\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ et $\cos x\geq\frac{1}{2}$ si $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

Soit : $f'(x)\geq 0$ si $x\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ et $f'(x)\leq 0$ si $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	π

$f(0)=0-2\sin 0=0$ $\qquad$ $f(\pi)=\pi-2\sin\pi=\pi$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

3) *Déduire du 2) qu'il existe une unique valeur x_0 non nulle dans $[0;\pi]$, donc un unique point M, qui répond au problème posé ; donner une valeur approchée de x_0.*

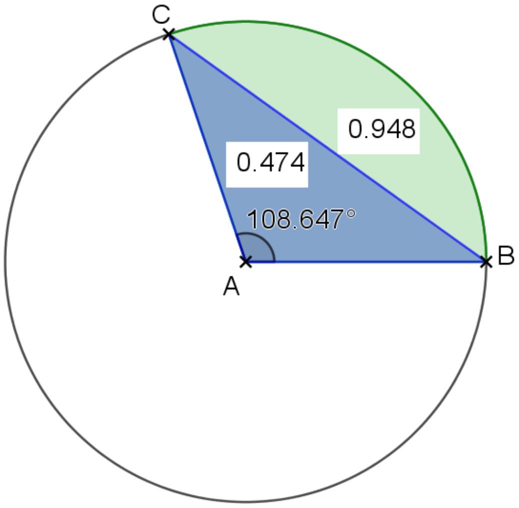
On cherche x_0 tel que $f(x_0)=0$.

Sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{3}\right]$: $f(x)<0$: il n'existe aucune valeur x telle que $f(x)=0$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$: f est continue et strictement croissante, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$ et $f(\pi)>0$.

D'après le T.V.I., il existe une unique valeur $x_0\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ telle que $f(x_0)=0$.

On trouve : $x_0\simeq 1{,}8955$ rad soit environ $108{,}6°$.



Exercice 5B.2 : **Polynésie septembre 2005**

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=e^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous. On considère également la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}$ et on nomme C sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) *Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$.*

Pour tout réel $x\in[0;+\infty[$: $-1\le\cos(4x)\le 1$

$$\Leftrightarrow\ -e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$$

b) *En déduire la limite de f en $+\infty$.*

On pose $X=-x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$.

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) *Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C.*

$$f(x)=g(x)\ \Leftrightarrow\ e^{-x}\cos(4x)=e^{-x}\ \Leftrightarrow\ \cos(4x)=1$$

$$\Leftrightarrow\ \cos(4x)=\cos 0\ \Leftrightarrow\ 4x=0+k\times 2\pi\ \Leftrightarrow\ x=0+k\times\frac{2\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

Les solutions sont : $S=\left\{k\times\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$: ce sont les abscisses des points communs aux courbes Γ et C.

$$f\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)=e^{-k\times\frac{\pi}{2}}\cos\left(4\times k\times\frac{\pi}{2}\right)=e^{-k\times\frac{\pi}{2}}.$$

Les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C sont :

$$\left(k\times\frac{\pi}{2};e^{-\frac{k\pi}{2}}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

3) *On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.*

a) *Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.*

$$u_n=f\left(n\frac{\pi}{2}\right)=e^{-n\frac{\pi}{2}}\cos\left(4\times n\frac{\pi}{2}\right)=e^{-n\frac{\pi}{2}}\cos(n\times 2\pi)=e^{-n\frac{\pi}{2}}$$

$$u_{n+1}=f\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)=e^{-(n+1)\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-n\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}\times u_n$$

La suite (u_n) est géométrique, de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) *En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.*

$$u_0=f(0)=e^{-0}\cos(0)=1$$

$$0<e^{-\frac{\pi}{2}}<1$$

Le premier terme étant positif, la suite (u_n) est décroissante.

Son expression générale est :

$$u_n=u_0\times\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n=e^{-\frac{n\pi}{2}}$$

On pose $X=-\frac{n\pi}{2}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-\frac{n\pi}{2}}=\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0.$$

4) a) *Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$:*

$$f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right].$$

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de fonction exponentielle et trigonométrique :

$$f'(x)=-e^{-x}\cos(4x)+e^{-x}\times(-4)\sin(4x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$$

b) *En déduire que les courbes Γ et C ont même tangente en chacun de leurs points communs.*

$$f'\left(\frac{n\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{n\pi}{2}}\left[\cos\left(4\times\frac{n\pi}{2}\right)+4\sin\left(4\times\frac{n\pi}{2}\right)\right]=-e^{-\frac{n\pi}{2}}$$

Or $g'(x)=-e^{-x}$ donc : $g'\left(\frac{n\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{n\pi}{2}}$

Les courbes Γ et C ont même tangente en chacun de leurs points communs.

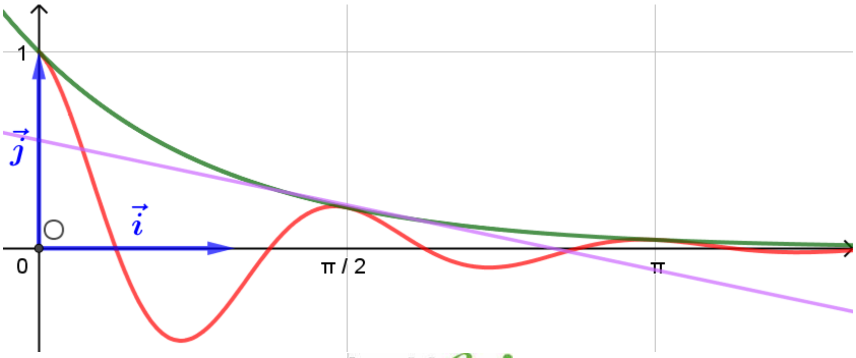
5) *Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Compléter le graphique ci-dessous en y traçant T et C.*

L'équation de la tangente T est :

$$y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\quad\text{avec } f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}\ \text{ et }\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi :

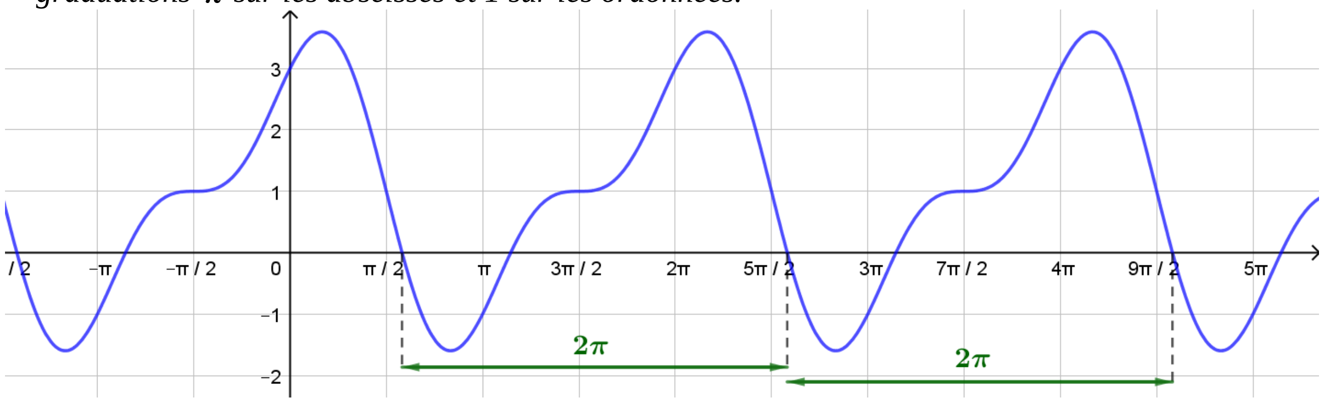
$$T : y = -e^{-\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + e^{-\frac{\pi}{2}} \simeq -0,21x + 0,33 + 0,21 = -0,21x + 0,54$$



Exercice 5B.3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \sin 2x + 2\cos x$.

1) *Visualiser la courbe sur votre calculatrice et faites une conjecture sur la périodicité de la fonction f puis démontrer cette conjecture. On prendra comme fenêtre $x \in [-4;13]$, $y \in [-2;4]$ et comme graduations π sur les abscisses et 1 sur les ordonnées.*



La période semble être égale à 2π.

2) *Montrer que l'on peut étudier la fonction f sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ puis montrer que :*

$$f'(x) = -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1).$$

Soit p la période cherchée :

$$f(x+p) = f(x) \Leftrightarrow 1 + \sin 2(x+p) + 2\cos(x+p) = 1 + \sin 2x + 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin(2x + 2p) + 2\cos(x+p) = 1 + \sin 2x + 2\cos x$$

En identifiant expression par expression, on doit avoir :

$$\begin{cases} 2x + 2p = 2x + k \times 2\pi \\ x + p = x + k \times 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = k \times 2\pi \\ p = k \times 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = k \times \pi \\ p = k \times 2\pi \end{cases}$$

La plus petite valeur satisfaisant ces deux conditions est : $p = 2\pi$.

La fonction f est 2π-périodique, on peut l'étudier sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3) *Étudier les variations sur I puis dresser le tableau de variation sur I.*

La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ en tant que somme de fonctions trigonométriques.

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2(\cos 2x - \sin x)$$

Or : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Donc $f'(x)=2\left(1-2\sin^2 x-\sin x\right)=2\left(-2\sin^2 x-\sin x+1\right)$

Résolvons d'abord l'équation : $-2\sin^2 x-\sin x+1=0$

on pose : $X=\sin x$, cette équation devient : $-2X^2-X+1=0$

calcul du discriminant : $\Delta=(-1)^2-4\times(-2)\times 1=1+8=9=3^2$

les solutions sont : $X_1=\dfrac{-(-1)-3}{2\times(-5)}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{-(-1)+3}{2\times(-5)}=\dfrac{4}{-4}=-1$

or $X=\sin x$ donc soit $\sin x=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$: $x=\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi$ ou $x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi=\dfrac{5\pi}{6}+k\times 2\pi$

soit $\sin x=-1$: $x=\dfrac{3\pi}{2}+k\times 2\pi$

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, les solutions de l'équation $-2X^2-X+1=0$ sont $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$.

A partir des racines de l'équation, on peut factoriser l'inéquation $2X^2-5X+2>0$:

$$-2X^2-X+1=-2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+1)$$

donc $2\left(-2\sin^2 x-\sin x+1\right)>0 \iff -2\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)(\sin x+1)>0$

Première méthode : approche intuitive

Pour tout $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$: $\sin x-\dfrac{1}{2}>0 \iff \sin x>\dfrac{1}{2} \iff \sin x>\sin\dfrac{\pi}{6}$

et $\sin x+1>0 \iff \sin x>-1$

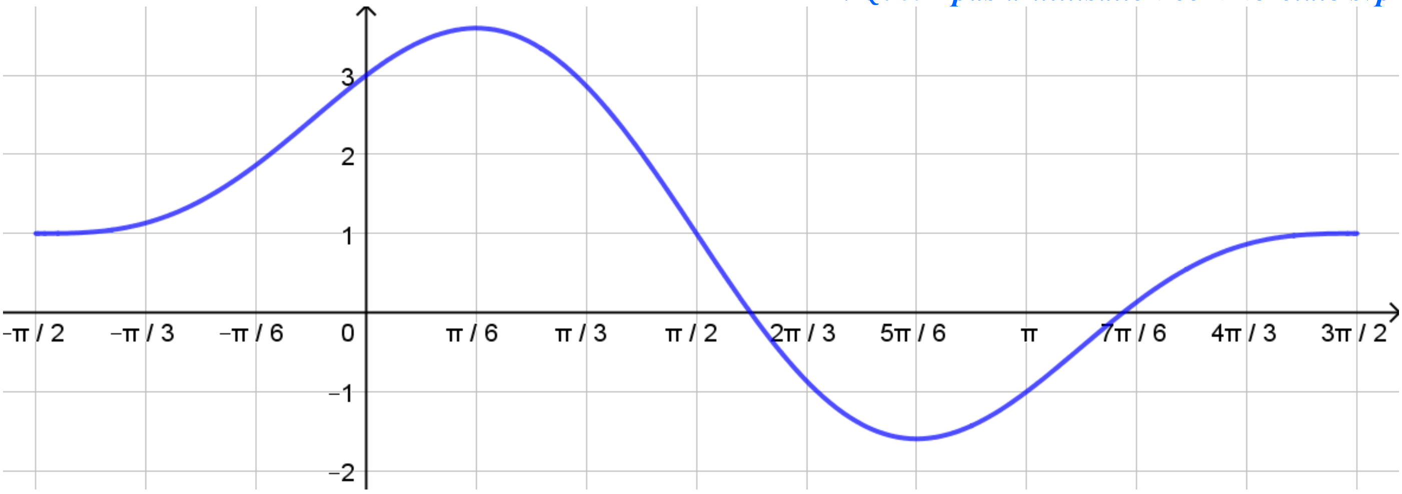
x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x-\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x+1$		$+$		$+$		$+$	0
$f'(x)=-2\times\ldots$		$+$	0	-	0	$+$	
f	1	↗	3,6	↘	$-1,6$	↗	1

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\sin\left(2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)+2\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1+\sin\left(2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\simeq 3,6$

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=1+\sin\left(2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)+2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\simeq -1,6$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1+\sin\left(2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)+2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1$



4) *Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède exactement deux solutions dans I et donner un encadrement à 10^{-2} de chacune de ces solutions. On note α et β ces solutions avec α < β.*

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$: $f(x)\geq 1$: l'équation $f(x)=0$ ne possède pas de solution.

Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$: la fonction est continue et strictement décroissante avec $f\left(\frac{\pi}{6}\right)\simeq 3{,}6$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\simeq -1{,}6$. D'après le corollaire du T.V.I., il existe une unique valeur $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ vérifiant : $f(\alpha)=0$. On trouve : $\alpha \simeq 1{,}83$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$: la fonction est continue et strictement croissante avec $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\simeq -1{,}6$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$. D'après le corollaire du T.V.I., il existe une unique valeur $\beta \in \left[\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$ vérifiant : $f(\beta)=0$. On trouve : $\beta \simeq 3{,}60$.

5) *En déduire les variations sur I de la fonction g définie par : $g(x)=2x-\cos 2x+4\sin x$.*

La fonction g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ en tant que somme de fonctions trigonométriques.

$$g'(x)=2+2\sin 2x+4\cos x=2(1+\sin 2x+2\cos x)=2\times f(x)$$

D'après ce qui précède :

si $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\alpha\right]\cup\left[\beta;\frac{3\pi}{2}\right]$: la fonction f est positive

donc $g'(x)\geq 0$ et la fonction g est croissante ;

si $x \in [\alpha;\beta]$: la fonction f est négative

donc $g'(x)\leq 0$ et la fonction g est décroissante.