PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 6A.1

Dans chaque cas déterminer une primitive de f :

a. $f(x)=\cos(4x+1)$ → $F(x)=$

b. $f(x)=\sin(2x+3)$ → $F(x)=$

c. $f(x)=\cos(-3x+5)$ → $F(x)=$

d. $f(x)=\sin(5-2x)$ → $F(x)=$

e. $f(x)=2\sin(x+3)$ → $F(x)=$

f. $f(x)=-5\cos(5x-8)$ → $F(x)=$

EXERCICE 6A.2

a) Déterminer la primitive de la fonction $f(x)=\cos x\times\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

b) Déterminer la primitive F de la fonction $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ définie sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ telle que $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

c) Déterminer la primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos(2x)}$ qui s'annule en 0 pour tout $x\in\left]0:\dfrac{\pi}{2}\right[$.

d) Déterminer les primitives de la fonction $f(x)=\sin x\times\cos^3 x$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

e) Déterminer les primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour la suite, on rappelle les formules :

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\ ,\quad \sin^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\ ,\quad \cos 2x=2\cos^2 x-1\ ,\quad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

EXERCICE 6A.3

***Linéariser** une expression trigonométrique consiste à l'écrire sans exposant supérieur à 1.*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2+\cos^2 x$.

a. Linéariser l'expression $f(x)$. **b.** Déterminer les primitives de f.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sin^4 x$.

a. Linéariser l'expression $g(x)$. **b.** Déterminer les primitives de g.

EXERCICE 6A.4

Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[8-x\cos\left(3x^2+\frac{\pi}{4}\right)\right]dx$

EXERCICE 6A.5

Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\,dx$

EXERCICE 6A.6

Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

EXERCICES 6A.1 Dans chaque cas déterminer une primitive de f :

a. $f(x)=\cos(4x+1)$ → $F(x)=\dfrac{\sin(4x+1)}{4}$

b. $f(x)=\sin(2x+3)$ → $F(x)=\dfrac{-\cos(2x+3)}{2}$

c. $f(x)=\cos(-3x+5)$ → $F(x)=\dfrac{\sin(-3x+5)}{-3}=-\dfrac{1}{3}\sin(-3x+5)$

d. $f(x)=\sin(5-2x)$ → $F(x)=\dfrac{-\cos(5-2x)}{-2}=\dfrac{1}{2}\cos(5-2x)$

e. $f(x)=2\sin(x+3)$ → $F(x)=2\times[-\cos(x+3)]=-2\cos(x+3)$

f. $f(x)=-5\cos(5x-8)$ → $F(x)=-5\times\dfrac{\sin(5x-8)}{5}=-\sin(5x-8)$

Exercice 6A.2 :

a) *Déterminer la primitive de la fonction* $f(x)=\cos x\times\sin^2 x$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en 0.*

On pose $u(x)=\sin x$ donc $u'(x)=\cos x$, ainsi : $f(x)=u'(x)\times(u(x))^2$.

Donc : $F(x)=\dfrac{1}{3}(u(x))^3+k=\dfrac{1}{3}\sin^3 x+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Or : $F(0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\sin^3 0+k=0 \Leftrightarrow k=0$.

La primitive cherchée est : $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}\sin^3 x}$.

b) *Déterminer la primitive F de la fonction* $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ *définie sur* $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *telle que* $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

On pose $u(x)=\cos x$ donc $u'(x)=-\sin x$, ainsi : $f(x)=\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^3}=-u'(x)\times(u(x))^{-3}$.

Donc : $F(x)=-\dfrac{(u(x))^{-3+1}}{-3+1}+k=-\dfrac{(u(x))^{-2}}{-2}+k=\dfrac{1}{2(u(x))^2}+k=\dfrac{1}{2\cos^2 x}+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Or : $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{\pi}{4}}+k=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+k=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{2}}+k=0 \Leftrightarrow k=-1$

La primitive cherchée est : $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}-1}$.

c) *Déterminer la primitive de la fonction* $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos(2x)}$ *qui s'annule en 0 pour tout* $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On rappelle que $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$ ainsi : $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$.

On pose $u(x)=\cos(2x)$ donc $u'(x)=-2\sin(2x)$

Ainsi : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-2}{-2}\times\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{-1}{4}\times\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{-1}{4}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $F(x)=\frac{-1}{4}\times\ln|u(x)|+k=\frac{-1}{4}\times\ln|u(x)|+k=\frac{-1}{4}\times\ln|\cos(2x)|+k \ , \ k\in\mathbb{R}$.

Or $F(0)=0$

Donc $\frac{-1}{4}\times\ln|\cos(2\times 0)|+k=0$

$\Leftrightarrow \ \frac{-1}{4}\times\ln|1|+k=0$

$\Leftrightarrow \ k=0$

La primitive cherchée est $F(x)=\frac{-1}{4}\times\ln|\cos(2x)|$.

d) *Déterminer les primitives de la fonction* $f(x)=\sin x\times\cos^3 x$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x)=\cos x \quad , \quad u'(x)=-\sin x$

D'où : $f(x)=-u'(x)\times u^3(x)$

Ainsi : $F(x)=-\frac{u^4(x)}{4}=\frac{-\cos^4 x}{4}$

e) *Déterminer les primitives de la fonction* $f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}^*$.

On pose : $u(x)=\sin x \quad , \quad u'(x)=\cos x$

Donc : $v(x)=x \quad , \quad v'(x)=1$

Ainsi : $f(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$

Les primitives de f sont de la forme :

$$F(x)=\frac{u(x)}{v(x)}+C=\frac{\sin x}{x}+C \ , \ C\in\mathbb{R}$$

On rappelle les formules :

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \ , \ \sin^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \ , \ \cos 2x=2\cos^2 x-1 \ , \ \sin 2x=2\sin x\cos x$$

Exercice 6A.3 :

Linéariser *une expression trigonométrique consiste à l'écrire sans exposant supérieur à 1.*

1. *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=2+\cos^2 x$.

a. *Linéariser l'expression* $f(x)$.

$$f(x)=2+\cos^2 x=2+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

b. *Déterminer les primitives de f.*

On pose $u(x)=2x \ \rightarrow \ u'(x)=2$ alors : $f(x)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\times u'(x)\times\frac{1}{2}\cos(u(x))$

$$F(x)=\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin(u(x))+k=\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+k \ , \ k\in\mathbb{R}$$

2. *Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=\sin^4 x$.

a. *Linéariser l'expression* $g(x)$.

$$g(x)=\sin^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

b. *Déterminer les primitives de g.*

$$G(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\sin 4x+k=\boxed{\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+k\ ,\ k\in\mathbb{R}}$$

Exercice 6A.4 :

Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[8-x\cos\left(3x^2+\frac{\pi}{4}\right)\right]dx$

On pose : $u(x)=3x^2+\frac{\pi}{4} \rightarrow u'(x)=6x$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[8-x\cos\left(3x^2+\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[8-\frac{1}{6}u'(x)\cos(u(x))\right]dx=\left[8x-\frac{1}{6}\sin(u(x))\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(8\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\sin\left(3\times\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(8\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\sin\left(3\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\left(2\pi-\frac{1}{6}\sin\left(3\times\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(-2\pi-\frac{1}{6}\sin\left(3\times\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\boxed{4\pi}$$

EXERCICE 6A.5

Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$

D'abord : $\displaystyle\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

Or : $\displaystyle\frac{1}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{a}{1+\sin x}+\frac{b}{1-\sin x}=\frac{a-a\sin x+b+b\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{(a+b)+(b-a)\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

Si cette relation est vraie pour tout réel x, alors :

$$\begin{cases}a+b=1\\ b-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+a=1\\ b=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}\text{, d'où : }\frac{1}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\sin x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\sin x}$$

On obtient : $\displaystyle\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{2}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$

On pose : $u(x)=1+\sin x$ et $v(x)=1-\sin x$

d'où : $u'(x)=\cos x$ et $v'(x)=-\cos x$

Ainsi : $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{u(x)}-\dfrac{v'(x)}{v(x)}\right)$

On obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{v'(x)}{v(x)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|u(x)|-\ln|v(x)|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$

La Merci MONTPELLIER

EXERCICE 6A.6

Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

On pose : $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

Ainsi : $\mathrm{I}+\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{\pi}{4}$

et : $\mathrm{I}-\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\Big[\ln|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$

On obtient :

$$(\mathrm{I}+\mathrm{J})+(\mathrm{I}-\mathrm{J})=2\mathrm{I}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

D'où : $\boxed{\mathrm{I}=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\ln 2}$

La Merci MONTPELLIER