PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES AVEC INTEGRATIONS PAR PARTIES

EXERCICES 6B.1

Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.

1. $f(x) = x\cos(x)$
2. $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$
3. $f(x) = x\sin(2x)$
4. $f(x) = (5x-3)\sin(3x-10)$
5. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x . dx$

EXERCICES 6B.2

Déterminer, à l'aide d'une double IPP tournante, une primitive de la fonction

$$f(x) = e^x . \cos x$$

EXERCICES 6B.3

Déterminer, à l'aide d'une IPP tournante (ou d'une autre méthode), une primitive de la fonction

$$f(x) = \sin x . \cos x$$

EXERCICES 6B.4

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \cos(\ln x)$

EXERCICES 6B.5 HORS-PROGRAMME

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICES 6B.1

Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.

1. $f(x)=x\cos(x)$

→on pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\cos x$

→on obtient : $u'(x)=1$ et $v(x)=\sin x$

IPP : $\int x\cos x\,dx = x\sin x-\int 1\times\sin x\,dx = x\sin x-(-\cos x) = x\sin x+\cos x$

2. $f(x)=x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

→on pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

→on obtient : $u'(x)=1$ et $v(x)=-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

IPP : $\int x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)dx=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\int\left(-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)dx$

$=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{3}\int\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)dx=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

$=-\frac{1}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

3. $f(x)=x\sin(2x)$

→on pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\sin(2x)$

→on obtient : $u'(x)=1$ et $v(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

IPP : $\int x\sin(2x)\,dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\int\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$

4. $f(x)=(5x-3)\sin(3x-10)$

→on pose $u(x)=5x-3$ et $v'(x)=\sin(3x-10)$

→on obtient : $u'(x)=5$ et $v(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-10)$

IPP : $\int(5x-3)\sin(3x-10)\,dx=-\frac{1}{3}(5x-3)\cos(3x-10)+\int 5\times\frac{1}{3}\cos(3x-10)\,dx$

$=-\frac{1}{3}(5x-3)\cos(3x-10)+\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}\sin(3x-10)$

$=-\frac{1}{3}(5x-3)\cos(3x-10)+\frac{5}{9}\sin(3x-10)$

5. *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x.dx$

→on pose : $u(x)=x^2$ et $v'(x)=\cos x$

→on obtient : $u'(x)=2x$ et $v(x)=\sin x$

IPP : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x.dx=\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x.dx$

→on pose : $u_2(x)=2x$ et $v_2'(x)=\sin x$

→on obtient : $u_2'(x)=2$ et $v_2(x)=-\cos x$

Ainsi : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x.dx = \left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left\{\left[-2x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2)\cos x.dx\right\}$

$$= \left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x.dx$$

$$= \left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 + 0 - 0 - 2 + 0$$

Soit : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x.dx = \frac{\pi^2}{4} - 2}$

Exercices 6B.2

Déterminer, à l'aide d'une double IPP tournante, une primitive de la fonction

$$f(x) = e^x.\cos x$$

→on pose $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = e^x$

→on obtient : $u'(x) = -\sin x$ et $v(x) = e^x$

IPP : $\int e^x.\cos x = e^x.\cos x - \int e^x(-\sin x) = e^x.\cos x + \int e^x \sin x$

2ème IPP : →on pose $u_2(x) = \sin x$ et $v_2'(x) = e^x$

→on obtient : $u_2'(x) = \cos x$ et $v_2(x) = e^x$

$\int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$

Retour à la 1ère IPP : $\int e^x.\cos x = e^x\cos x + \int e^x \sin x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x$

L'équation : $\int e^x.\cos x = e^x.\cos x + e^x\sin x - \int e^x \cos x$ donne :

$$2\times\int e^x.\cos x = e^x\cos x + e^x \sin x$$

Ainsi : $\boxed{\int e^x.\cos x = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)}$

Exercices 6B.3

Déterminer, à l'aide d'une IPP tournante (ou d'une autre méthode), une primitive de la fonction

$$f(x) = \sin x.\cos x$$

Avec une IPP :

→on pose $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \cos x$

→on obtient : $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$

$\int \sin x.\cos x = \sin^2 x - \int \cos x \times \sin x \Leftrightarrow \int \sin x.\cos x + \int \cos x\times\sin x = \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow 2\times\int \cos x\times \sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \int \cos x\times\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)$$

Ainsi : $\boxed{\int \cos x\times\sin x = \frac{1-\cos(2x)}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x)}$

NB : $f(x) = \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ donc une primitive est : $F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$

EXERCICES 6B.4

Déterminer une primitive de la fonction $f(x)=\cos(\ln x)$

$$\int \cos(\ln x)\,dx$$

IPP : on pose : $u=\cos(\ln x)$ et $v'=dx$

donc $u'=-\frac{1}{x}\sin(\ln x)$ et $v=x$

Ainsi : $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x)-\int\left(-\frac{1}{x}\sin(\ln x)\right)\times x\,dx = x\cos(\ln x)+\int \sin(\ln x)\,dx$

IPP : on pose : $u_1=\sin(\ln x)$ et $v_1'=dx$

donc $u_1'=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$ et $v_1=x$

Ainsi : $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)\,dx$

Donc : $2\times\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)$

Ainsi : $\boxed{\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)}$

EXERCICES 6B.5 HORS-PROGRAMME

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$$

La fonction f est paire, ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=2\times\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx .$$

On définit la fonction I sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathrm{I}(b)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}\,dx$:

$$\mathrm{I}(0)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-0\times x}\,dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx .$$

La relation $\mathrm{I}(b)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}\,dx$ donne par dérivation :

$$\frac{d}{db}\left(\mathrm{I}(b)\right)=\frac{d}{db}\left(\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{I}'(b)=\int_{0}^{+\infty}\frac{d}{db}\left(\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{I}'(b)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times\left(-xe^{-bx}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{I}'(b)=-\int_{0}^{+\infty}\sin x\times e^{-bx}\,dx$$

→on pose $u(x)=\sin x$ et $v'(x)=e^{-bx}$

→on obtient : $u'(x)=\cos x$ et $v(x)=-\frac{1}{b}e^{-bx}$

IPP : $\int \sin x\times e^{-bx}=-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x-\int\left(-\frac{1}{b}e^{-bx}\right)\cos x=-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x+\frac{1}{b}\int e^{-bx}\cos x$

2ème IPP : →on pose $u_2(x)=\cos x$ et $v_2'(x)=e^{-bx}$

→on obtient : $u_2'(x)=-\sin x$ et $v_2(x)=-\frac{1}{b}e^{-bx}$

$$\int e^{-bx}\cos x=-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos x-\int\left(-\frac{1}{b}e^{-bx}\right)(-\sin x)=-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos x-\frac{1}{b}\int e^{-bx}\sin x$$

Retour à la 1ère IPP :

$$\int \sin x\times e^{-bx}=-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x+\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos x-\frac{1}{b}\int e^{-bx}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \int \sin x\times e^{-bx}=-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x-\frac{1}{b^2}e^{-bx}\cos x-\frac{1}{b^2}\int e^{-bx}\sin x$$

$$\Leftrightarrow\ \int \sin x\times e^{-bx}+\frac{1}{b^2}\int e^{-bx}\sin x=-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x-\frac{1}{b^2}e^{-bx}\cos x$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{b^2+1}{b^2}\int e^{-bx}\sin x=-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x-\frac{1}{b^2}e^{-bx}\cos x$$

$$\Leftrightarrow\ \int e^{-bx}\sin x=\left(-\frac{1}{b}e^{-bx}\sin x-\frac{1}{b^2}e^{-bx}\cos x\right)\times\frac{b^2}{b^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\ \int e^{-bx}\sin x=-\frac{e^{-bx}}{b^2+1}(b\sin x+\cos x)$$

Ainsi : $\mathrm{I}'(b)=-\left[-\frac{e^{-bx}}{b^2+1}(b\sin x+\cos x)\right]_0^{+\infty}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-bx}=0$ donc :

$$\mathrm{I}'(b)=\left[\frac{e^{-bx}}{b^2+1}(b\sin x+\cos x)\right]_0^{+\infty}=-\frac{e^{-b\times 0}}{b^2+1}(b\sin 0+\cos 0)$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{I}'(b)=-\frac{1}{b^2+1}$$

On intègre :

$$\int \mathrm{I}'(b)\,db=\int -\frac{1}{b^2+1}\,db$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{I}(b)=-\arctan(b)+C$$ **HORS-PROGRAMME**

Ainsi : $\mathrm{I}(b)=-\arctan(b)+C=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}\,dx$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-bx}=0$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{I}(b)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\arctan(b)+C=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\times e^{-bx}\,dx=0$

d'où : $-\frac{\pi}{2}+C=0\ \Leftrightarrow\ C=\frac{\pi}{2}$

On obtient :

$$\mathrm{I}(0)=-\arctan(0)+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Soit : $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi}$