PRIMITIVE D'UNE FONCTION TRIGONOMETRIQUE : TROIS METHODES

EXERCICES 6C.1

Déterminer une primitive de la fonction $f\left(x\right)=e^{2x}.\sin\left(5x\right)$ de trois manières différentes.

EXERCICES 6C.1

Déterminer une primitive de la fonction $f(x)=e^{2x}.\sin(5x)$ *de trois manières différentes.*

Première méthode :

Dans ce style de calcul, la primitive cherchée est de la forme :

$F(x)=e^{2x}.(\mathrm{A}\cos(5x)+\mathrm{B}\sin(5x))$ avec A et B deux réels à déterminer.

D'où : $F'(x)=2e^{2x}.(\mathrm{A}\cos(5x)+\mathrm{B}\sin(5x))+e^{2x}.(-5\mathrm{A}\sin(5x)+5\mathrm{B}\cos(5x))$

$$=e^{2x}.\left[(2\mathrm{A}\cos(5x)+2\mathrm{B}\sin(5x))+(-5\mathrm{A}\sin(5x)+5\mathrm{B}\cos(5x))\right]$$

$$=e^{2x}.\left[(2\mathrm{A}+5\mathrm{B})\cos(5x)+(2\mathrm{B}-5\mathrm{A})\sin(5x)\right]$$

Ainsi : $F'(x)=f(x)$

$$\Leftrightarrow\ e^{2x}.\left[(2\mathrm{A}+5\mathrm{B})\cos(5x)+(2\mathrm{B}-5\mathrm{A})\sin(5x)\right]=e^{2x}.\sin(5x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\mathrm{A}+5\mathrm{B}=0\\2\mathrm{B}-5\mathrm{A}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{B}=-\frac{2}{5}\mathrm{A}\\2\left(-\frac{2}{5}\mathrm{A}\right)-5\mathrm{A}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{B}=-\frac{2}{5}\mathrm{A}\\-\frac{4}{5}\mathrm{A}-5\mathrm{A}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{B}=-\frac{2}{5}\mathrm{A}\\-4\mathrm{A}-25\mathrm{A}=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{B}=-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{5}{29}\right)=\frac{2}{29}\\\mathrm{A}=-\frac{5}{29}\end{cases}$$

Une primitive cherchée est $F(x)=e^{2x}.\left(-\frac{5}{29}\cos(5x)+\frac{2}{29}\sin(5x)\right)$.

Deuxième méthode : avec une intégration par partie

$f(x)=e^{2x}.\sin(5x)$

→on pose $u'(x)=e^{2x}$ et $v(x)=\sin(5x)$

→on obtient : $u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x)=5\cos(5x)$

1ère IPP : $\int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\int\frac{1}{2}e^{2x}\times5\cos(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{5}{2}\int e^{2x}.\cos(5x)$

2ème IPP : →on pose $u_2'(x)=e^{2x}$ et $v_2(x)=\cos(5x)$

→on obtient : $u_2(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ et $v_2'(x)=-5\sin(5x)$

$$\int e^{2x}.\cos(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\cos(5x)-\int\frac{1}{2}e^{2x}.(-5\sin(5x))=\frac{1}{2}e^{2x}.\cos(5x)+\frac{5}{2}\int e^{2x}.\sin(5x)$$

Retour à la 1ère IPP :

$$\int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}.\cos(5x)+\frac{5}{2}\int e^{2x}.\sin(5x)\right]$$

$$\Leftrightarrow\ \int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{5}{4}e^{2x}.\cos(5x)-\frac{25}{4}\int e^{2x}.\sin(5x)$$

$$\Leftrightarrow\ \int e^{2x}.\sin(5x)+\frac{25}{4}\int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{5}{4}e^{2x}.\cos(5x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{29}{4}\int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{5}{4}e^{2x}.\cos(5x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{4}{29}\times\frac{1}{2}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{4}{29}\times\frac{5}{4}e^{2x}.\cos(5x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \int e^{2x}.\sin(5x)=\frac{2}{29}e^{2x}.\sin(5x)-\frac{5}{29}e^{2x}.\cos(5x)$$

Troisième méthode : avec les complexes

$$f(x)=e^{2x}.\sin(5x)$$

Méthode : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ donc : $e^{5ix}=\cos 5x+i\sin 5x$

Ainsi : $e^{2x}\times e^{5ix}=e^{2x}\times\cos 5x+ie^{2x}\times\sin 5x$

Donc : $e^{2x}.\sin(5x)=\operatorname{Im}\left(e^{2x}\times e^{5ix}\right)=\operatorname{Im}\left(e^{(2+5i)x}\right)$

Une primitive de $e^{(2+5i)x}$ est : $\dfrac{1}{2+5i}e^{(2+5i)x}$

Or : $\dfrac{1}{2+5i}=\dfrac{1}{2+5i}\times\dfrac{2-5i}{2-5i}=\dfrac{2-5i}{4+25}=\dfrac{2-5i}{29}=\dfrac{2}{29}-\dfrac{5i}{29}$

Une primitive de $e^{(2+5i)x}$ est :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{29}-\frac{5i}{29}\right)e^{(2+5i)x}&=\left(\frac{2}{29}-\frac{5i}{29}\right)e^{2x}\times e^{5ix}\\&=\left(\frac{2}{29}-\frac{5i}{29}\right)e^{2x}\times(\cos 5x+i\sin 5x)\\&=e^{2x}\left[\left(\frac{2}{29}\cos 5x+\frac{5}{29}\sin 5x\right)+i\left(-\frac{5}{29}\cos 5x+\frac{2}{29}\sin 5x\right)\right]\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int e^{2x}.\sin(5x)&=\operatorname{Im}\left(e^{2x}\left[\left(\frac{2}{29}\cos 5x+\frac{5}{29}\sin 5x\right)+i\left(-\frac{5}{29}\cos 5x+\frac{2}{29}\sin 5x\right)\right]\right)\\&=e^{2x}\left(-\frac{5}{29}\cos 5x+\frac{2}{29}\sin 5x\right)\end{aligned}$$