PRIMITIVE D'UNE FONCTION TRIGONOMETRIQUE AVEC CHANGEMENT DE VARIABLE

EXERCICES 6D.1

Déterminer $\int \sin^4 x.\cos^3 x.dx$.

EXERCICES 6D.2

Déterminer $\int \sin^5 x.dx$.

EXERCICES 6D.3

Déterminer $\int \cos^7 x.dx$.

EXERCICES 6D.4

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \sin x \times \cos x \times \sqrt{2+\sin x}$

EXERCICES 6D.5

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x(1+\cos x)}$

EXERCICES 6D.6

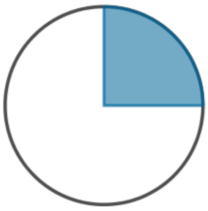
Déterminer $\int \dfrac{\cos(\ln t)}{t}.dt$.

EXERCICES 6D.7

Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

EXERCICES 6D.8

Calculer l'aire d'un quart de disque de rayon R.



EXERCICES 6D.9 HORS PROGRAMME

→ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$; $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$.

b) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$.

c) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$.

EXERCICES 6D.1

Déterminer une primitive de la fonction $\int \sin^4 x.\cos^3 x.dx$.

Cette méthode s'applique si une des deux puissances est impaire.
On pose :

$$u = \sin x \qquad \text{donc :} \quad du = \cos x.dx \qquad \text{car :} \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \times \cos^3 x.dx &= \int \sin^4 x \times \cos^2 x \times \cos x.dx \\ &= \int \sin^4 x \times \left(1 - \sin^2 x\right) \times \cos x.dx \\ &= \int u^4 \times \left(1 - u^2\right).du \\ &= \int u^4 - u^6.du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \\ &= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}\end{aligned}$$

EXERCICES 6D.2

Déterminer les primitives de la fonction $\int \sin^5 x.dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x.dx &= \int \sin^4 x \times \sin x.dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \times \sin x.dx\end{aligned}$$

On pose : $u = \cos x$ donc : $\frac{du}{dx} = -\sin x$ d'où : $du = -\sin x.dx$

Donc :

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x.dx &= \int \left(1-u^2\right)^2 \times (-du) = -\int \left(1-u^2\right)^2.du \\ &= -\int 1 - 2u^2 + u^4.du \\ &= -\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C \ , \ C \in \mathbb{R} \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C \ , \ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

EXERCICES 6D.3

Déterminer les primitives de la fonction $\int \cos^7 x.dx$.

$$\int \cos^7 x.dx = \int \cos^6 x \times \cos x.dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^3 \times \cos x.dx$$

On pose : $u = \sin x$ donc : $\frac{du}{dx} = \cos x$ d'où : $du = \cos x.dx$

Donc :

$$\int \cos^7 x.dx = \int \left(1-u^2\right)^3.du = \int \left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right).du = u - u^3 + \frac{3}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

EXERCICES 6D.4

Déterminer une primitive de la fonction $f(x)=\sin x\times\cos x\times\sqrt{2+\sin x}$

On pose : $u=\sin x$ donc : $\dfrac{du}{dx}=\cos x$ et $du=\cos x.dx$

Ainsi : $\displaystyle\int \sin x\times\cos x\times\sqrt{2+\sin x}\,dx=\int u\times\sqrt{2+u}\,du$

On pose : $t=\sqrt{2+u}$ donc : $t^2=2+u \Leftrightarrow u=t^2-2$, d'où : $du=2t\times dt$

Ainsi : $\displaystyle\int u\times\sqrt{2+u}\,du=\int\left(t^2-2\right)\times t\times 2t\times dt=\int 2t^4-4t^2\,dt$

$$=\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3=\frac{2}{5}\left(\sqrt{2+u}\right)^5-\frac{4}{3}\left(\sqrt{2+u}\right)^3$$

$$=\frac{2}{5}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^5-\frac{4}{3}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^3$$

EXERCICES 6D.5

Déterminer une primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x(1+\cos x)}$

On pose : $u=\cos x$ donc : $\dfrac{du}{dx}=-\sin x$ d'où : $du=-\sin x.dx$

Ainsi : $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^2 x(1+\cos x)}dx=\int\frac{-1}{u^2(1+u)}du=-\int\frac{1}{u^2(1+u)}du$

Or : $\dfrac{1}{u^2(1+u)}=\dfrac{a}{u}+\dfrac{bu+c}{u^2}+\dfrac{d}{1+u}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u^2(1+u)}=\frac{au(1+u)}{u^2(1+u)}+\frac{(bu+c)(1+u)}{u^2(1+u)}+\frac{du^2}{u^2(1+u)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u^2(1+u)}=\frac{au+au^2}{u^2(1+u)}+\frac{bu+bu^2+c+cu}{u^2(1+u)}+\frac{du^2}{u^2(1+u)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u^2(1+u)}=\frac{au+(a+b+d)u^2+(a+b+c)u+c}{u^2(1+u)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+d=0\\ a+b+c=0\\ c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=-a-b=1\\ a+b=-c=-1\\ c=1\end{cases} \rightarrow \frac{1}{u^2(1+u)}=\frac{a}{u}+\frac{bu+1}{u^2}+\frac{1}{1+u}$$

En prenant $b=0$, on obtient : $a=-1$, d'où :

$$\frac{1}{u^2(1+u)}=\frac{-1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1+u}$$

Ainsi : $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^2 x(1+\cos x)}dx=-\int\frac{-1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1+u}du$

$$=\ln|u|+\frac{1}{u}-\ln|1+u|$$

$$=\ln|\cos x|+\frac{1}{\cos x}-\ln|1+\cos x|$$

$$=\ln\left|\frac{\cos x}{1+\cos x}\right|+\frac{1}{\cos x}$$

EXERCICES 6D.6

Déterminer $\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$

On pose $U = \ln t$ donc : $dU = \frac{dt}{t}$

Ainsi : $\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt = \int \cos(U) dU = \sin(U) + C = \sin(\ln t) + C \text{ , } C \in \mathbb{R}$

EXERCICES 6D.7

Calculer $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x . \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

On pose : $u = \sin x$ donc : $\frac{du}{dx} = \cos x$ et $du = \cos x . dx$

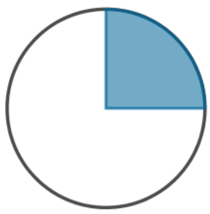
avec : si $x = \frac{\pi}{6}$: $u = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

si $x = \frac{\pi}{2}$: $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Ainsi : $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x . \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{u}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2u}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \left[\ln \left| 1 + u^2 \right| \right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \ln \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$$

EXERCICES 6D.8



Calculer l'aire d'un quart de disque de rayon R.

Le domaine étudié est constitué de points $\mathrm{M}(x; y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq R \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{cases}$$

La dernière relation se traduit par :

$$y \leq \sqrt{R^2 - x^2} .$$

L'aire cherchée est :

$$A = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \, dx = \int_0^R [y]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

On pose : $x = R \sin \theta$, d'où : $dx = R \cos \theta . d\theta$.

Si $x = 0$: $\theta = 0$

Si $x = R$: $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ainsi : $$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \theta} \times R \cos \theta . d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sqrt{\cos^2 \theta} \times R \cos \theta . d\theta$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta . d\theta = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} . d\theta$$

$$= R^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{4}\sin 0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^2$$

EXERCICES 6D.9 **HORS PROGRAMME**

a) *Déterminer une primitive de la fonction* $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

On utilise les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2\cos^2 x}{1} - 1 = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} - 1 = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1$$

et $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\dfrac{\sin x}{\cos x}\times\cos^2 x = 2\tan x\times\cos^2 x$

Ici : $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$ avec : $\cos x = \dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} - 1$

On pose : $t=\tan\dfrac{x}{2}$ donc : $\cos x = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - \dfrac{1+t^2}{1+t^2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\times\cos^2\frac{x}{2} = 2\times t\times\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}} = 2\times t\times\frac{1}{\tan^2\dfrac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Or : $t=\tan\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\arctan t \Leftrightarrow x = 2\arctan t$, d'où : $dx = 2\times\dfrac{1}{1+t^2}\times dt$ **HORS PROGRAMME**

Ainsi : $$\int\frac{1}{1+\cos x}dx = \int\frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{1}{\dfrac{1+t^2}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int\frac{1}{\dfrac{2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt = \int dt = t = \tan\frac{x}{2}$$

b) *Déterminer une primitive de la fonction* $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$.

D'après ce qui précède :

$$\int\frac{1}{2+\cos x}dx = \int\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{1}{\dfrac{2+2t^2}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{1}{\dfrac{3+t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{2}{3+t^2}dt$$

$$= \int\frac{1}{3}\times\frac{2}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt = \frac{2}{3}\int\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt$$ **HORS PROGRAMME**

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\tan\frac{x}{2}\right)$$

c) *Déterminer une primitive de la fonction* $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$.

D'après ce qui précède, en posant : $t=\tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\arctan t \Leftrightarrow x=2\arctan t$, d'où : $dx=2\times\frac{1}{1+t^2}\times dt$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Ainsi : $$\frac{1+\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{\frac{t^2+2t+1}{1+t^2}}{\frac{2t^2}{1+t^2}}=\frac{t^2+2t+1}{\left(1+t^2\right)t^2}\times\frac{1+t^2}{2}=\frac{t^2+2t+1}{2t^2}$$

En intégrant :
$$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx=\int\frac{t^2+2t+1}{2t^2}\times\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{t^2+2t+1}{t^2\left(1+t^2\right)}dt$$

Or : $$\frac{t^2+2t+1}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2}+\frac{dt+e}{1+t^2} \quad , a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2+2t+1}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{at\left(1+t^2\right)+\left(bt+x\right)\left(1+t^2\right)+\left(dt+e\right)t^2}{t^2\left(1+t^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2+2t+1}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{at+at^3+bt+bt^3+c+ct^2+dt^3+et^2}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{\left(a+b+d\right)t^3+\left(c+e\right)t^2+\left(a+b\right)t+c}{t^2\left(1+t^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ c+e=1 \\ a+b=2 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a-b=-2 \\ e=1-c=0 \\ a+b=2 \\ c=1 \end{cases} \rightarrow \frac{t^2+2t+1}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{a}{t}+\frac{bt+1}{t^2}+\frac{-2t}{1+t^2}$$

En prenant $b=0$, on obtient : $a=2$, d'où :
$$\frac{t^2+2t+1}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{1+t^2}$$

Ainsi : $$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx=\int\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{1+t^2}dt=2\ln|t|-\frac{1}{t}-\ln\left|1+t^2\right|=\ln\left|\frac{t^2}{1+t^2}\right|-\frac{1}{t}$$

Or : $$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

Donc : $$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx=2\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}-\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

Or : $$2\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\ln\left(\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)=\ln\left(\frac{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\right)=\ln\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

Ainsi : $$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx=\ln\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$$