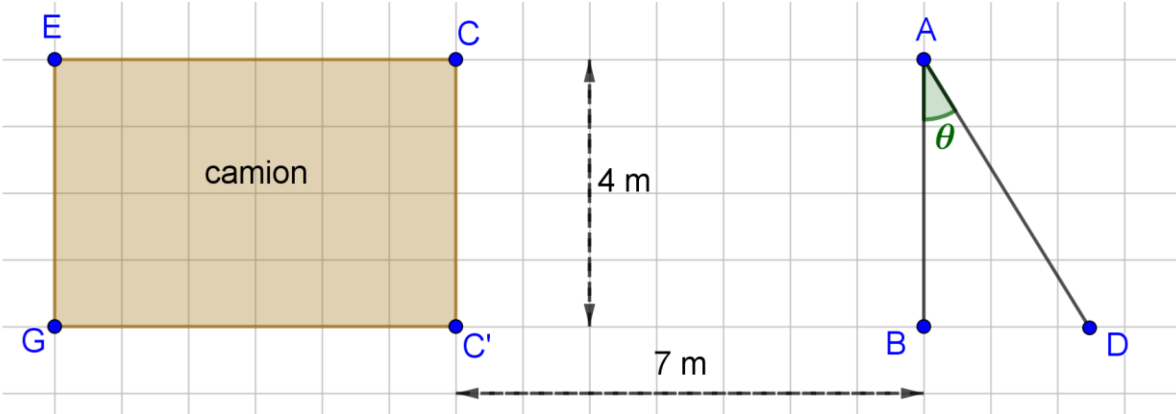
Exercices à prise d'initiative – Trigonométrie

Exercice 1 :

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur.
Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h.
Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.
Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite à la vitesse de 30 km/h !
L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



1) Déterminer les distances AD et C'D et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement AD et C'D.
2) On pose : $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$.

   Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3) Conclure.

Exercice 2 :

Comparer pour tout $0 < a < 1$, les fonctions f_a et g_a définies sur $[0;\pi]$ par :

$$f_a(x) = \sin(ax) \text{ et } g_a(x) = a\sin x.$$

Exercice 3 :

Le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O. I est un point du segment $]OA[$.

Où placer M pour que $\widehat{OMI}$ soit maximal ?

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$

Exercice 5 :

Combien vaut $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

1) Le triangle ABD est rectangle donc $AB = AD\cos\theta$ soit $AD = \dfrac{AB}{\cos\theta} = \dfrac{4}{\cos\theta}$ avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

De même : $BD = AB\tan\theta = 4\tan\theta$ donc $C'D = C'B + BD = 7 + 4\tan\theta$.

Formule de vitesse : $v = \dfrac{d}{t}$ donc $v \times t = d$ et $t = \dfrac{d}{v}$. De plus, $1km/h = 1000m/h = 1000m/3600s = \dfrac{1}{3,6}m/s$

Ainsi : $t_1 = \dfrac{AD}{v_1} = \dfrac{\dfrac{4}{\cos\theta}}{\dfrac{30}{3,6}} = \dfrac{4}{\cos\theta} \times \dfrac{3,6}{30} = \dfrac{14,4}{30\cos\theta}$ (en m/s) OU $t_1 = \dfrac{AD}{v_1} = \dfrac{\dfrac{0,004}{\cos\theta}}{30} = \dfrac{0,004}{30\cos\theta}$ (en km/h)

$t_2 = \dfrac{C'D}{v_2} = \dfrac{7 + 4\tan\theta}{\dfrac{60}{3,6}} = (7 + 4\tan\theta) \times \dfrac{3,6}{60} = \dfrac{25,2 + 14,4\tan\theta}{60}$ (en m/s)

OU $t_2 = \dfrac{C'D}{v_2} = \dfrac{0,007 + 0,004\tan\theta}{60}$ (en km/h)

2) Le lapin aura la vie sauve s'il arrive le premier en D soit si $t_1 < t_2$

$$t_1 < t_2 \iff \frac{14,4}{30\cos\theta} < \frac{25,2 + 14,4\tan\theta}{60} \iff \frac{14,4}{30} < \frac{25,2\cos\theta + 14,4\sin\theta}{60}$$

$$\iff 28,8 < 25,2\cos\theta + 14,4\sin\theta \iff 0 < 25,2\cos\theta + 14,4\sin\theta - 28,8$$

$$\iff 0 < \frac{25,2}{14,4}\cos\theta + \sin\theta - 2 \iff 0 < \frac{7}{4}\cos\theta + \sin\theta - 2$$

$$\iff \frac{7}{2}\cos\theta + 2\sin\theta - 4 > 0 \iff f(\theta) > 0$$

$$t_1 < t_2 \iff \frac{0,004}{30\cos\theta} < \frac{0,007 + 0,004\tan\theta}{60} \iff \frac{0,004}{30} < \frac{0,007\cos\theta + 0,004\sin\theta}{60}$$

$$\iff 0,008 < 0,007\cos\theta + 0,004\sin\theta \iff 8 < 7\cos\theta + 4\sin\theta$$

$$\iff 0 < 7\cos\theta + 4\sin\theta - 8 \iff 0 < \frac{7}{2}\cos\theta + 2\sin\theta - 4 \iff f(\theta) > 0$$

f est dérivable en tant que composée de fonctions trigonométriques

$$f'(\theta) = 2 \times \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{4 \times (-(-\sin\theta))}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} - \frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2 - 4\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

Le dénominateur est strictement positif car $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

$2 - 4\sin\theta = 0 \iff \sin\theta = \dfrac{1}{2}$: soit $\theta = \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, soit $\theta = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$ mais $\dfrac{5\pi}{6} > \dfrac{\pi}{2}$.

$2 - 4\sin\theta > 0 \iff -4\sin\theta > -2 \iff \sin\theta < \dfrac{1}{2}$

Donc $f'(\theta) > 0$ si $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[$ et $f'(\theta) < 0$ si $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

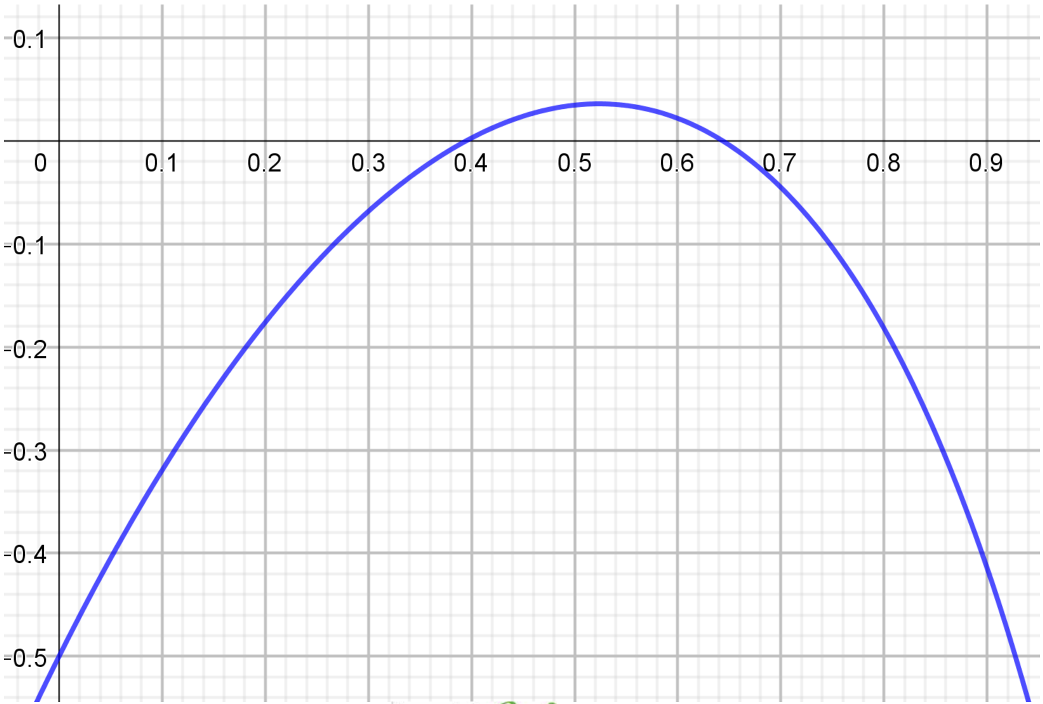
$$f(0) = \frac{7}{2} + 2\tan 0 - \frac{4}{\cos 0} = \frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + 2\tan\frac{\pi}{6} - \frac{4}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{7}{2} + 2\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} - 4 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2} - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{7}{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\frac{7}{2}-2\sqrt{3}\simeq 0,003359$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{7}{2}+\frac{2\sin\theta-4}{\cos\theta}=-\infty$$

Donc on peut appliquer deux fois le corollaire du TVI pour prouver que la fonction f s'annule deux fois, pour $\theta\simeq 0,395\,\text{rad}$ et pour $\theta\simeq 0,644\,\text{rad}$, soit environ entre 22,6° et 36,9°.

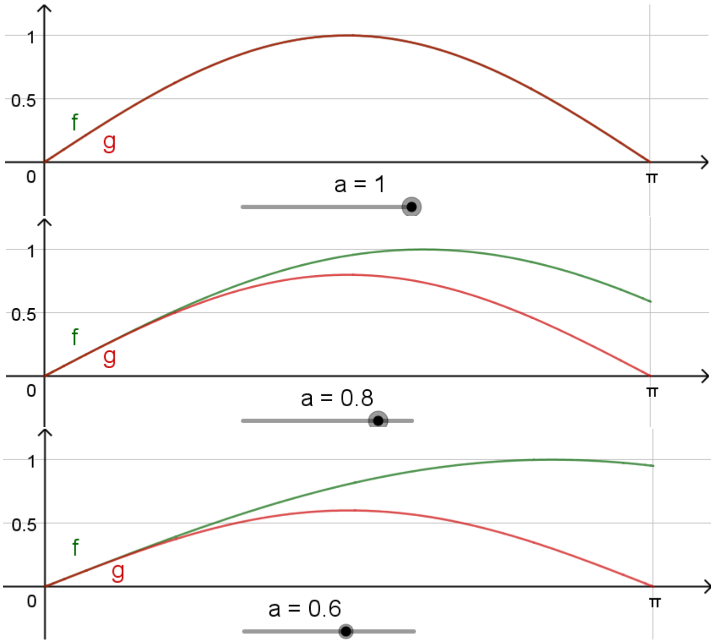


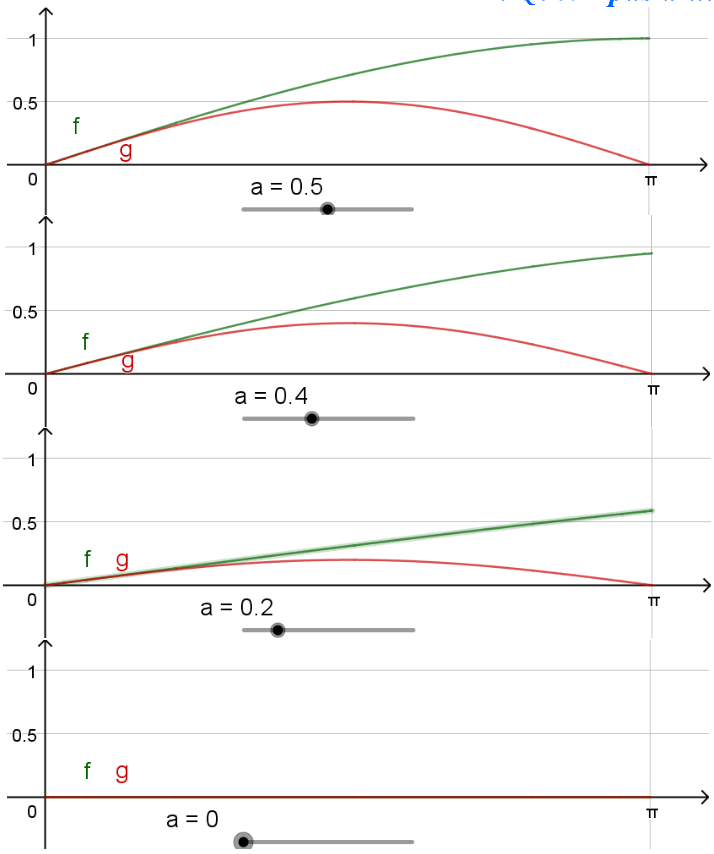
Exercice 2 :

Comparer pour tout $0<a<1$, les fonctions f_a et g_a définies sur $[0;\pi]$ par :

$$f_a(x)=\sin(ax) \text{ et } g_a(x)=a\sin x.$$

A l'aide de Geogebra, on réalise les observations suivantes :





On définit une fonction h_a sur $[0;\pi]$ par :

$$h_a(x) = f_a(x) - g_a(x)$$

h_a est dérivable sur $[0;\pi]$:

$$h_a'(x) = a\cos(ax) - a\cos(x) = a\left[\cos(ax) - \cos(x)\right]$$

Or $x \in [0;\pi]$ et $0 < a < 1$ donc :

$$a \times x \in [0;\pi]$$

$$0 < ax < x < \pi$$

Et la fonction cosinus étant décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$:

$$\cos(ax) > \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(ax) - \cos(x) > 0$$

Ainsi la dérivée h_a' est positive sur $[0;\pi]$ et la fonction h_a est croissante sur $[0;\pi]$:

pour tout $x \in [0;\pi]$: $h_a(x) > h_a(0) \quad \Leftrightarrow \quad h_a(x) > 0$.

Ainsi pour tout $x \in [0;\pi]$ et pour tout $0 < a < 1$:

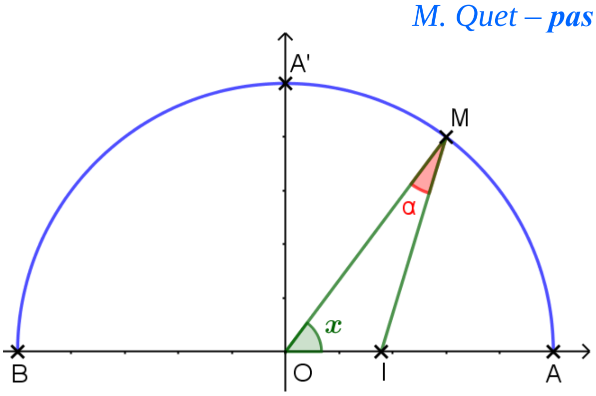
$$f_a(x) > g_a(x)$$

Exercice 3 :

Le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ *et de centre O. I est un point du segment* $]OA[$.

Où placer M pour que $\widehat{OMI}$ *soit maximal ?*

En raison de la symétrie du problème, on étudiera le demi-cercle de diamètre $[AB]$.



Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$, les coordonnées du point M sont $(\cos x;\sin x)$.

On note a l'abscisse du point I donc ses coordonnées sont $(a;0)$ avec $0<a<1$.

Ainsi, en utilisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\begin{vmatrix} a-\cos x \\ -\sin x \end{vmatrix}$ et sachant que $\mathrm{MO}=1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MO}}.\overrightarrow{\mathrm{MI}} &= \mathrm{MO}\times\mathrm{MI}\times\cos\alpha = \sqrt{(a-\cos x)^2+(-\sin x)^2}\times\cos\alpha \\ &= \sqrt{(a-\cos x)^2+\sin^2 x}\times\cos\alpha \\ &= \sqrt{a^2-2a\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}\times\cos\alpha \\ &= \sqrt{a^2-2a\cos x+1}\times\cos\alpha\end{aligned}$$

On remarque que pour $0<a<1$, $(a-\cos x)^2+\sin^2 x>0$ et $\sqrt{(a-\cos x)^2+\sin^2 x}$ est bien défini.

D'autre part, avec $\overrightarrow{\mathrm{MO}}\begin{vmatrix} -\cos x \\ -\sin x \end{vmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MO}}.\overrightarrow{\mathrm{MI}} &= -\cos x(a-\cos x)+(-\sin x)(-\sin x) = -a\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x \\ &= 1-a\cos x\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit :

$$\sqrt{a^2-2a\cos x+1}\times\cos\alpha = 1-a\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1-a\cos x}{\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}$$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;\pi]$ avec $0<a<1$ par :

$$f(x) = \frac{1-a\cos x}{\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}.$$

La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions trigonométrique de dénominateur non nul.

$$f'(x) = \frac{a\sin x\times\sqrt{a^2-2a\cos x+1}-(1-a\cos x)\times\dfrac{2a\sin x}{2\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}}{\left(\sqrt{a^2-2a\cos x+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{a\sin x\times\sqrt{a^2-2a\cos x+1}\times 2\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}{2\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}-\dfrac{(1-a\cos x)\times 2a\sin x}{2\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}}{a^2-2a\cos x+1}$$

$$= \frac{\dfrac{2a\sin x\times\left(a^2-2a\cos x+1\right)}{2\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}-\dfrac{(1-a\cos x)\times 2a\sin x}{2\sqrt{a^2-2a\cos x+1}}}{a^2-2a\cos x+1}$$

$$= \frac{2a\sin x \times \left(a^2 - 2a\cos x + 1\right) - \left(1 - a\cos x\right) \times 2a\sin x}{2\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right)\sqrt{a^2 - 2a\cos x + 1}}$$

$$= \frac{2a\sin x \times \left[\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right) - \left(1 - a\cos x\right)\right]}{2\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right)\sqrt{a^2 - 2a\cos x + 1}}$$

$$= \frac{2a\sin x \times \left(a^2 - 2a\cos x + 1 - 1 + a\cos x\right)}{2\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right)\sqrt{a^2 - 2a\cos x + 1}}$$

$$= \frac{2a\sin x \times \left(a^2 - a\cos x\right)}{2\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right)\sqrt{a^2 - 2a\cos x + 1}}$$

$$= \frac{a^2 \sin x \times \left(a - \cos x\right)}{\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right)\sqrt{a^2 - 2a\cos x + 1}}$$

Pour tout réel $x \in [0;\pi]$:

$$\sin x \geq 0$$

Et nous avons déjà justifié que

$$\left(a^2 - 2a\cos x + 1\right) > 0.$$

Ainsi :

$$f'(x) = 0 \iff a - \cos x = 0 \iff -\cos x = -a \iff \cos x = a \iff x = \cos^{-1} a.$$

$$f'(x) > 0 \iff a - \cos x > 0 \iff -\cos x > -a \iff \cos x < a.$$

Or la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$ donc :

Si $x \in \left[0; \cos^{-1} a\right]$: $f'(x) \leq 0$ et la fonction f est décroissante ;

Si $x \in \left[\cos^{-1} a; \pi\right]$: $f'(x) \geq 0$ et la fonction f est croissante.

Le minimum de la fonction f est atteint si $\cos x = a$, c'est-à-dire si les points M et I ont la même abscisse.

Or $f(x) = \cos \alpha$ et la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$

donc la fonction f est minimale sur $[0;\pi]$ pour un angle α maximal.

Pour que l'angle $\widehat{\mathrm{OMI}}$ soit maximal, il faut placer le point M comme l'un des points d'intersection du cercle avec la perpendiculaire à $[\mathrm{AB}]$ passant par I.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π–périodiques.

Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Avec les formules :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},$$

l'équation devient :

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3=1 \iff \left(1-t^2\right)^3+\left(2t\right)^3=\left(1+t^2\right)^3$$

$$\iff \left(1-t^2\right)^3-\left(1+t^2\right)^3+\left(2t\right)^3=0$$

Or $\quad a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc :

$$\left[\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)\right]\left[\left(1-t^2\right)^2+\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)+\left(1+t^2\right)^2\right]+8t^3=0$$

$$\iff -2t^2\left[1-2t^2+t^4+1-t^4+1+2t^2+t^4\right]+8t^3=0$$

$$\iff -2t^2\left(t^4+3\right)+8t^3=0$$

$$\iff -2t^2\left(t^4-4t+3\right)=0$$

Solution évidente : $t=1$ donc :

$$-2t^2(t-1)\left(t^3+t^2+t-3\right)=0$$

Solution évidente : $t=1$ donc :

$$-2t^2(t-1)^2\left(t^2+2t+3\right)=0$$

Discriminant :

$$\Delta=2^2-4\times1\times3=-8$$

Le polynôme t^2+2t+3 est strictement positif, donc les solutions sont :

$$t=0 \text{ et } t=1.$$

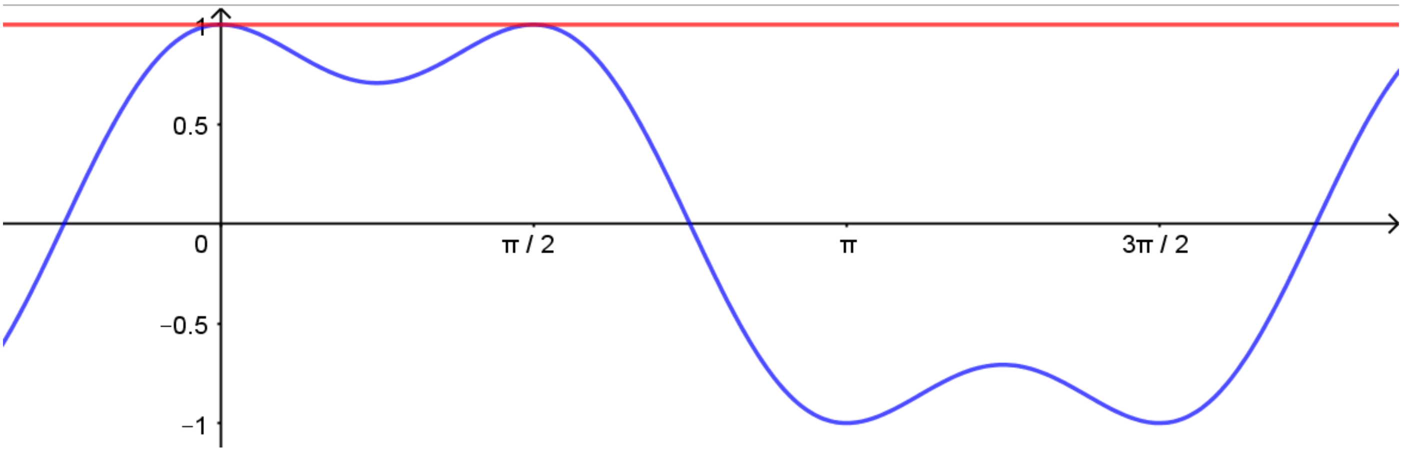
Or $\quad t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff \frac{x}{2}=\tan^{-1}(t) \iff x=2\tan^{-1}(t)$

Ainsi $\quad$ si $t=0$, alors $x=2\tan^{-1}(0)=0[2\pi]$

si $t=1$, alors $x=2\tan^{-1}(1)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$$S=\left\{0[2\pi];\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}.$$



Autre approche :

On a, pour tout réel x :

$$\cos^3 + \sin^3 x = 1 \Leftrightarrow \cos^3 + \sin^3 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Ainsi : $\cos^3 + \sin^3 x = \cos^2 x + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2(\cos x - 1) + \sin^2 x(\sin x - 1) = 0$

Maintenant, l'addition de deux termes est nulle si et seulement tous les termes sont nuls donc (par la règle de l'équation produit nulle) les solutions sont :

$$\begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \\ \sin^2 x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \\ x = \pi/2 + 2k\pi \end{cases}$$

Ici, ne sont gardées que les solutions qui donnent un cosinus positif ou sinus positif (car si $x = \pi$, on a $\cos(\pi)^3 + \sin(\pi)^3 = (-1)^3 + 0^3 = -1 \neq 1$ et de même on obtient, si $x = -\pi/2$: $\cos(-\pi/2)^3 + \sin(-\pi/2)^3 = (0)^3 + (-1)^3 = -1 \neq 1$)

Autre approche :

$$\cos^3 x + \sin^3 x = 1 \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(\cos^2 x - \cos x \times \sin x + \sin^2 x\right) = 1 \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 1$$

Autre approche :

$f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$

→ $f'(x) = 3\cos^2 x \times (-\sin x) + 3\sin^2 x \times \cos x = 3\cos x \sin x(\cos x - \sin x)$

Autre approche :

Il s'agit d'une équation symétrique en sinx et cosx.

Remplaçons donc x par $y+\frac{\pi}{4}$ et calculons successivement :

$\sin^3\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^3\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\left(\sin y\cos\frac{\pi}{4}+\cos y\sin\frac{\pi}{4}\right)^3+\left(\cos y\cos\frac{\pi}{4}-\sin y\sin\frac{\pi}{4}\right)^3=1$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left((\sin y+\cos y)^3+(\cos y-\sin y)^3\right)=1$

$\sin^3 y+3\sin^2 y\cos y+3\sin y\cos^2 y+\cos^3 y+\cos^3 y-3\cos^2 y\sin y+3\cos y\sin^2 y-\sin^3 y=2\sqrt{2}$

$2\cos^3 y+6\sin^2 y\cos y=2\sqrt{2}$

$2\cos^3 y+6\left(1-\cos^2 y\right)\cos y=2\sqrt{2}$

$2\cos^3 y+6\cos y-6\cos^3 y=2\sqrt{2}$

$4\cos^3 y-6\cos y+2\sqrt{2}=0$

$\cos^3 y-\frac{3}{2}\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

Visiblement $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ vérifie cette dernière équation.

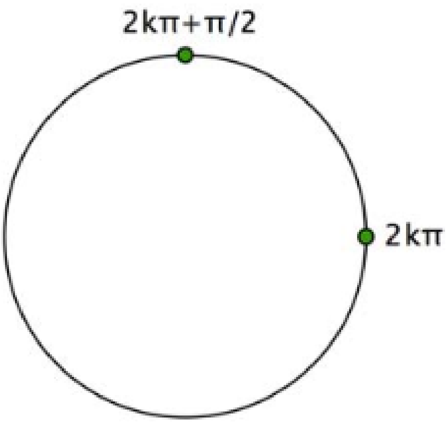
Elle se factorise donc en : $\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos^2 y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y-1\right)=0$

ou encore en : $\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos y+\sqrt{2}\right)=0$.

Elle est donc vérifiée pour $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos y=-\sqrt{2}$ (à rejeter).

Ainsi : $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$; $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$;

$$\boxed{x=2k\pi \text{ ou } x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}}$$



Exercice 5 :

Combien vaut $\arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)$?

On sait que :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$$

Démonstration

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\times\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

$$=\frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\times\frac{1}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}}=\frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

$$=\frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\times\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$$

Ainsi :

$$\tan(\arctan(1)+\arctan(2))=\frac{\tan(\arctan(1))+\tan(\arctan(2))}{1-\tan(\arctan(1))\times\tan(\arctan(2))}=\frac{1+2}{1-1\times 2}=-3$$

$$\tan(\pi-\arctan(3))=\frac{\tan(\pi)-\tan(\arctan(3))}{1+\tan(\pi)\times\tan(\arctan(3))}=\frac{0-3}{1+0\times 3}=-3$$

Donc :

$$\tan(\arctan(1)+\arctan(2))=\tan(\pi-\arctan(3))$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan(1)+\arctan(2)=\pi-\arctan(3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)=\pi$$