Exercices à prise d'initiative n° 2 – Trigonométrie

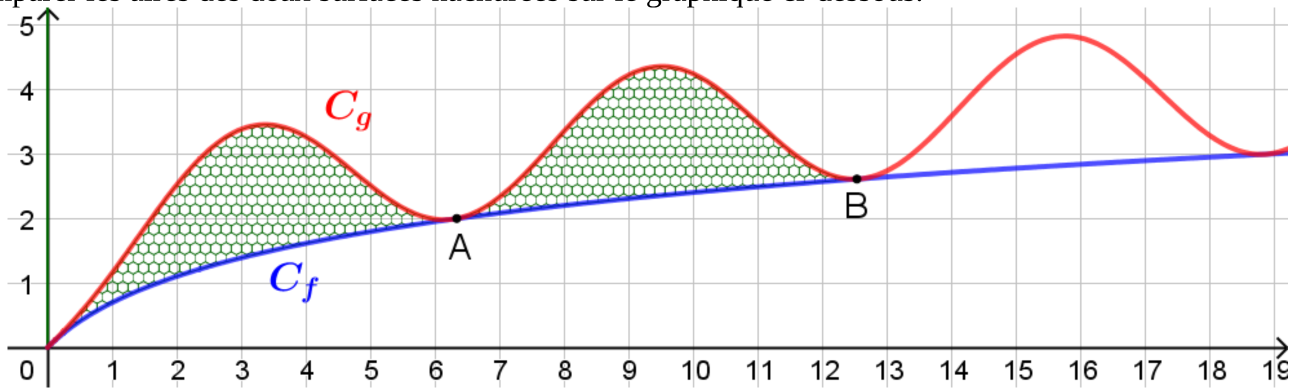
Exercice 1 : Bac Nouvelle Calédonie – Mars 2016

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;16]$ par :

$$f(x)=\ln(x+1) \text{ et } g(x)=\ln(x+1)+1-\cos x.$$

Dans un repère du plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur le graphique ci-dessous.



Exercice 2 : Bac Nouvelle Calédonie – Mars 2015

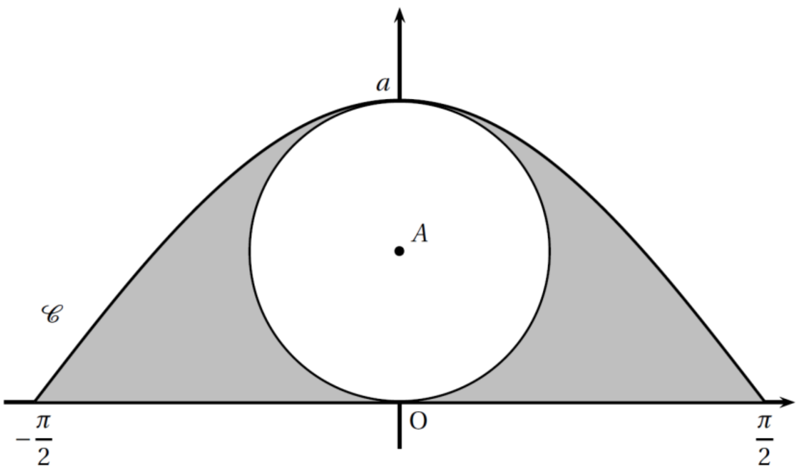
Partie C

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C d'équation $y=a\cos x$ avec $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe C pour des valeurs de a inférieures à $1,4$.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$, et la courbe C est égale à $2a$ unités d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?



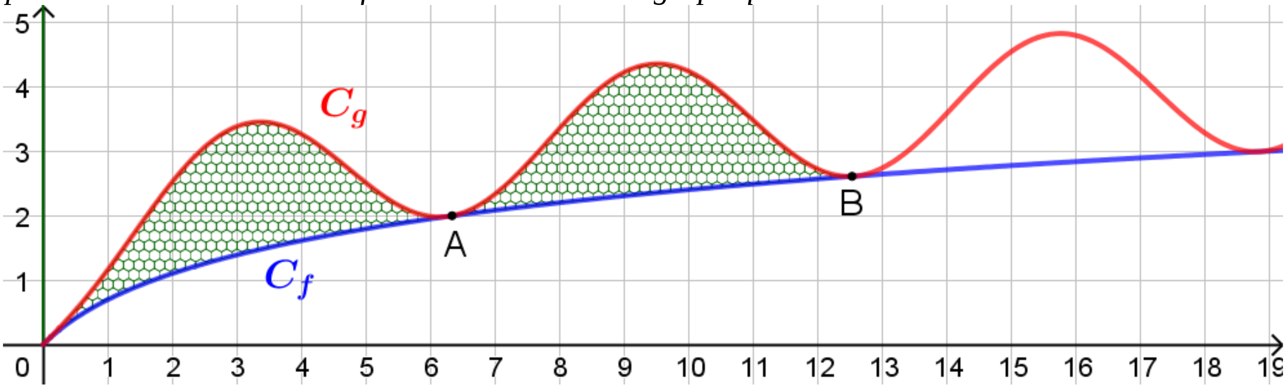
Exercice 1 : Bac Nouvelle Calédonie – Mars 2016

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;16]$ par :

$$f(x)=\ln(x+1) \text{ et } g(x)=\ln(x+1)+1-\cos x.$$

Dans un repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur le graphique ci-dessous.



On doit d'abord déterminer les coordonnées des points A et B :

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln(x+1)+1-\cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow \cos x=\cos(0+k\times 2\pi),\ k\in\mathbb{Z}$$
$$x=0+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Pour $x=2\pi$, les coordonnées du point A sont :

$$(2\pi;\ln(2\pi+1))$$

Pour $x=4\pi$, les coordonnées du point B sont :

$$(4\pi;\ln(4\pi+1))$$

L'exercice revient à comparer : $\int_0^{2\pi} g(x)-f(x)dx$ et $\int_{2\pi}^{4\pi} g(x)-f(x)dx$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$g(x)-f(x)=\ln(x+1)+1-\cos x-\ln(x+1)=1-\cos x$$

Une primitive de $g-f$ est :

$$(G-F)(x)=x-\sin x.$$

Ainsi :

$$\int_0^{2\pi} g(x)-f(x)dx=[x-\sin x]_0^{2\pi}=2\pi-\sin 2\pi=2\pi$$
$$\int_{2\pi}^{4\pi} g(x)-f(x)dx=[x-\sin x]_{2\pi}^{4\pi}=(4\pi-\sin 4\pi)-(2\pi-\sin 2\pi)=2\pi$$

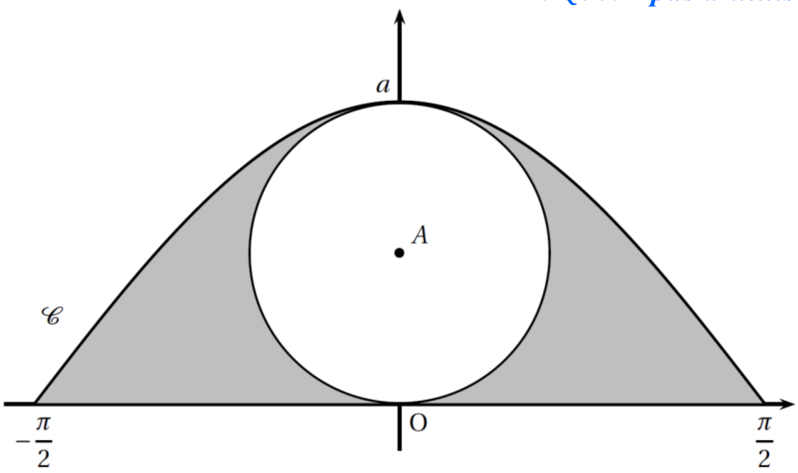
Ces deux aires sont égales.

Exercice 2 : Bac Nouvelle Calédonie – Mars 2015

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C d'équation $y=a\cos x$ avec $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe C pour des valeurs de a inférieures à $1,4$.



1. *Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation* $x=-\frac{\pi}{2}$ *et* $x=\frac{\pi}{2}$*, et la courbe* C *est égale à* $2a$ *unités d'aire.*

Il suffit de calculer l'aire sous la courbe de la fonction $y=a\cos x$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=\left[a\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2a \text{ u.a.}$$

2. *Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel* a *pour respecter cette contrainte ?*

L'aire du disque vaut : $\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{4}$.

On désire que :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx-\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Soit : $2a-\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{4}$

$\Leftrightarrow 2a=\frac{\pi a^2}{4}+\frac{\pi a^2}{4}$

$\Leftrightarrow 2a=\frac{\pi a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 4a=\pi a^2$

$\Leftrightarrow \pi a^2-4a=0$

$\Leftrightarrow a(\pi a-4)=0$

Soit $a=0$, soit $a=\frac{4}{\pi}$.

Le rayon ne pouvant être nul, la valeur de a cherchée est $\frac{4}{\pi}$.