Spécialité Mathématiques **2020**

Contrôle de Mathématiques – Fonctions trigonométriques

Exercice 1 :

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{\cos x} \qquad f(x)=\left[\cos(3-5x)\right]^2 \qquad g(x)=e^{\sin\left(3x^2-5\right)}$$

Exercice 2 :

Etudier la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-1}$

Exercice 3 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^2 2x-\sin 2x+3$.

1) Etudier la périodicité et la parité de *f*.
2) Etudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 : *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{(1+\cos x)\cos x-(x+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+\cos^2 x+x\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\sin x+1}{\cos^2 x}$$

$$f(x)=\left[\cos(3-5x)\right]^2$$

$$f'(x)=2\cos(3-5x)\left[-5(-\sin(3-5x))\right]=10\cos(3-5x)\sin(3-5x)=10\sin(6-10x)$$

$$g(x)=e^{\sin\left(3x^2-5\right)} \qquad g'(x)=6x\cos\left(3x^2-5\right)e^{\sin\left(3x^2-5\right)}$$

Exercice 2 : *Etudier la limite suivante :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-1}$

Pour tout réel $x>1$: $-1\le\sin x\le 1 \Leftrightarrow -1+x\le x+\sin x\le x+1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1}\le\frac{x+\sin x}{x-1}\le\frac{x+1}{x-1}$

Ce qui donne : $1\le\frac{x+\sin x}{x-1}\le\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$

Par encadrement, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-1}=1$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\sin^2 2x-\sin 2x+3$.

1) *Etudier la périodicité et la parité de f.*

$$f(-x)=\sin^2(2(-x))-\sin(2(-x))+3=\sin^2(-2x)-\sin(-2x)+3=(\sin(-2x))^2+\sin(2x)+3$$

$$=(-\sin(2x))^2+\sin(2x)+3=(\sin(2x))^2+\sin(2x)+3=\sin^2(2x)+\sin(2x)+3\neq f(x)$$

La fonction n'est ni paire, ni impaire.

Soit p la période cherchée :

$$f(x+p)=\sin^2(2(x+p))-\sin(2(x+p))+3=\sin^2(2x+2p)-\sin(2x+2p)+3$$

Donc $f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow 2x+2p=2x+2\pi\ [2\pi] \Leftrightarrow 2p=2\pi[2\pi]$

$$\Leftrightarrow p=\pi\left[\frac{2\pi}{2}\right] \Leftrightarrow p=\pi[\pi]$$

La fonction *f* est $\pi-$périodique.

2) *Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction *f* est dérivable en tant que composée de fonction trigonométriques et polynomiales.

$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $f(x)=(\sin 2x)^2-\sin 2x+3$.

En posant $u(x)=\sin 2x$ donc $u'(x)=2\cos 2x$, on obtient :

$$f'(x)=2\times\sin 2x\times 2\cos 2x-2\cos 2x=2\cos 2x(2\sin 2x-1).$$

Etude du signe du premier facteur :

$\cos 2x = 0 \iff \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{2}$:

$\quad$ soit $2x = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \iff x = \dfrac{\pi}{4}[\pi]$,

$\quad$ soit $2x = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \iff x = -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$.

sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\cos 2x$ est décroissante, donc :

$\quad$ si $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$: $\cos 2x \geq 0$

$\quad$ si $x \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\cos 2x \leq 0$.

Etude du signe du deuxième facteur :

$2\sin 2x - 1 = 0 \iff 2\sin 2x = 1 \iff \sin 2x = \dfrac{1}{2} \iff \sin 2x = \dfrac{\pi}{6}$:

$\quad$ soit $2x = \dfrac{\pi}{6}[2\pi] \iff x = \dfrac{\pi}{12}[\pi]$,

$\quad$ soit $2x = \pi - \dfrac{\pi}{6}[2\pi] \iff 2x = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi] \iff x = \dfrac{5\pi}{12}[\pi]$.

sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, la fonction $\sin 2x$ est croissante et sur $x \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ elle est décroissante, donc :

$\quad$ si $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{12}\right]$: $\sin 2x \leq 0$

$\quad$ si $x \in \left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{5\pi}{12}\right]$: $\sin 2x \geq 0$

$\quad$ si $x \in \left[\dfrac{5\pi}{12};\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin 2x \leq 0$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos 2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2\sin 2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	0

$f(0) = \sin^2 0 - \sin 0 + 3 = 3$

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin^2\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6} + 3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{11}{4}$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin^2\dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2} + 3 = 1 - 1 + 3 = 3$

$f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sin^2\dfrac{5\pi}{6} - \sin\dfrac{5\pi}{6} + 3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{11}{4}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\pi-\sin\pi+3=0-0+3=3$$