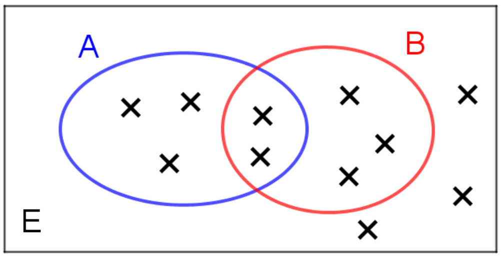
Exercices sur les factorielles

Exercice 1A.1 :

On a représenté sur le diagramme ci-contre un ensemble E et deux de ses sous-ensembles A et B (chaque élément de E est représenté par une croix).



1. Calculer $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(A \cap B)$, $\text{card}(A \cup B)$, $\text{card}(E)$.
2. Quelle égalité lie les quatre premiers nombres ?

Exercice 1A.2 :

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves s'intéressent au jeu d'échecs et 3 élèves s'intéressent à la fois à la musique et au jeu d'échecs.
Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique ni au jeu d'échecs ?

Exercice 1A.3 :

Simplifier : a) $\dfrac{15!}{13!}$; b) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$; c) $\dfrac{17!}{19!-18!}$

Exercice 1A.4 :

Calculer la somme : $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{99}{100!}$.

Exercice 1A.5

Démontrer que : $\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!}-\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=3n+4$

Exercice 1A.6 :

Résoudre l'équation : $7!\times 6!=x!$

Exercice 1A.7 :

Résoudre l'équation : $x^3-x=(x+1)!$

Exercice 1A.8 :

Calculer plus simplement la somme : $A_n=\sum_{k=1}^{n} k\times k!$

Exercice 1A.9 :

Dans la fraction suivante, le numérateur est le produit des n premiers nombres impairs, et le dénominateur est le produit des n premiers nombres pairs :

$$Q_n=\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)},\ (n\in\mathbb{N}^*).$$

Exprimer Q_n d'une manière plus “compacte”, au moyen de factorielles.

Exercice 1A.10 :

Soient a,b des réels strictement positifs.

Montrer que la suite de terme général : $u_n=\dfrac{a^n}{(n!)^b}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 1A.11:

Résoudre dans $\mathbb{N}^4$ l'équation : $x!+y!+z!=t!$.

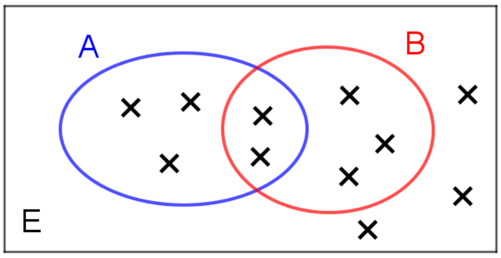
Exercice 1A.12 :

Montrer, à l'aide de $k!\geq 2^{k-1}$ valable pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}}<2$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1A.1 :

On a représenté sur le diagramme ci-contre un ensemble E et deux de ses sous-ensembles A et B (chaque élément de E est représenté par une croix).



1. Calculer $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(A\cap B)$, $\text{card}(A\cup B)$, $\text{card}(E)$.
2. Quelle égalité lie les quatre premiers nombres ?

1. $\text{card}(A)=5$, $\text{card}(B)=5$, $\text{card}(A\cap B)=2$, $\text{card}(A\cup B)=8$, $\text{card}(E)=11$.

2. L'égalité liant les quatre premiers nombres est la suivante :

$$\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$$

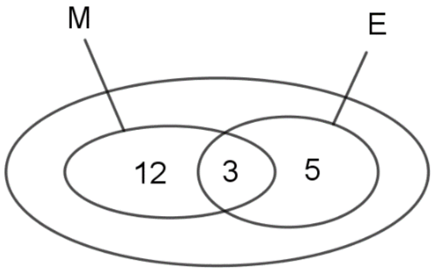
Exercice 1A.2 :

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves s'intéressent au jeu d'échecs et 3 élèves s'intéressent à la fois à la musique et au jeu d'échecs.
Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique ni au jeu d'échecs ?

Grâce à un diagramme, on peut visualiser l'énoncé en inscrivant à chaque fois le nombre d'élèves :

On a :

$$\begin{aligned} card(M\cup E) &= card(M)+card(E)-card(M\cap E)\\ &=15+8-3\\ &=20. \end{aligned}$$



Ainsi $25-20=5$

→5 élèves ne s'intéressent ni à la musique, ni aux échecs.

Exercice 1A.3 :

$$\frac{15!}{13!}=\frac{15\times14\times\boxed{13!}}{\boxed{13!}}=210$$

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=\frac{(n+3)\times(n+2)\times\boxed{(n+1)!}}{\boxed{(n+1)!}}=(n+3)(n+2)$$

$$\frac{17!}{19!-18!}=\frac{17!}{19\times18!-18!}=\frac{17!}{18!(19-1)}=\frac{17!}{18!\times18}=\frac{17!}{18\times17!\times18}=\frac{1}{18\times18}=\frac{1}{324}$$

Exercice 1A.4 :

Calculer la somme : $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{99}{100!}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{99}{100!} &= \frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\frac{4-1}{4!}+...+\frac{100-1}{100!}\\ &=\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{100}{100!}-\frac{1}{100!}\\ &=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{99!}-\frac{1}{100!}\end{aligned}$$

Par télescopage, on obtient :

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{99}{100!}=1-\frac{1}{100!}$$

Exercice 1A.5 : Démontrer que : $\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!}-\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=3n+4$

$$\frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+3)\times(n+2)\times(n+1)!-(n+2)\times(n+1)!}{(n+1)!}-\frac{(n+1)\times n\times\boxed{(n-1)!}}{\boxed{(n-1)!}}$$

$$=\frac{\left[(n+3)-1\right](n+2)\times\boxed{(n+1)!}}{\boxed{(n+1)!}}-n(n+1)$$

$$=(n+2)(n+2)-(n+1)\times n$$

$$=n^2+4n+4-n^2-n$$

$$=3n+4$$

Exercice 1A.6 : *Résoudre l'équation :* $7!\times 6!=x!$

$$7!\times 6!=7!\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$

$$=7!\times 4\times 2\times 6\times 5\times 3\times 1$$

$$=7!\times 8\times\times 3\times 2\times 5\times 3\times 1$$

$$=8!\times 3\times 3\times 2\times 5\times 1$$

$$=8!\times 9\times 10$$

$$=10!$$

Donc : $x=10$

Exercice 1A.7 : *Résoudre l'équation :* $x^3-x=(x+1)!$

$$x^3-x=(x+1)!$$

$$\Leftrightarrow\ x\left(x^2-1\right)=(x+1)!$$

$$\Leftrightarrow\ x(x+1)(x-1)=x!\times(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\ x(x-1)=x!$$

$$\Leftrightarrow\ x(x-1)=x\times(x-1)!$$

$$\Leftrightarrow\ x(x-1)=x\times(x-1)\times(x-2)!$$

$$\Leftrightarrow\ 1=(x-2)!$$

Deux possibilités :

Soit $x-2=0 \ \Leftrightarrow\ x=2$

Soit $x-2=1 \ \Leftrightarrow\ x=3$

Ainsi : $S=\{2;3\}$

Exercice 1A.8 : *Calculer plus simplement la somme :* $\mathrm{A}_n=\sum_{k=1}^{n}k\times k!$

Pour tout $k\in\ 1;n$: $k\times k!=(k+1-1)\times k!=(k+1)\times k!-1\times k!=(k+1)!-k!$

Ainsi : $\mathrm{A}_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k!=(2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+\left((n+1)!-n!\right)=(n+1)!-1$

(résolution classique par télescopage)

Exercice 1A.9 :

Dans la fraction suivante, le numérateur est le produit des n premiers nombres impairs, et le dénominateur est le produit des n premiers nombres pairs :

$$Q_n = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2n)}\ ,\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right).$$

Exprimer Q_n d'une manière plus "compacte", au moyen de factorielles.

$$Q_n = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2n)} \times \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2n)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2n)} = \frac{(2n)!}{(2\times 1\times 2\times 2\times \ldots \times 2\times n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\times (n!)^2} = \frac{(2n)!}{4^n\times (n!)^2}$$

Exercice 1A.10 : *Soient a,b des réels strictement positifs.*

Montrer que la suite de terme général : $u_n = \dfrac{a^n}{(n!)^b}$ converge et préciser sa limite.

Calculons le quotient de deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1}}{((n+1)!)^b}}{\dfrac{a^n}{(n!)^b}} = \frac{a^{n+1}}{((n+1)!)^b}\times\frac{(n!)^b}{a^n} = \frac{a}{(n+1)^b}$$

a et b étant des constantes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0$, et on peut déterminer un rang N tel que :

$$\forall n\ge \mathrm{N} : \frac{u_{n+1}}{u_n}<1.$$

La suite u est donc strictement décroissante à partir d'un certain rang ; étant également minorée par 0, elle converge. On note L sa limite telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \mathrm{L}.$$

Ainsi la relation obtenue ci-dessus : $u_{n+1} = \dfrac{a}{(n+1)^b}\times u_n$ donne : $\mathrm{L} = \dfrac{a}{(n+1)^b}\times \mathrm{L}$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{(n+1)^b} = 0.$

La relation $\mathrm{L}=0\times\mathrm{L}$ donne : $\mathrm{L}=0$.

Exercice 1A.11: *Résoudre dans $\mathbb{N}^4$ l'équation : $x!+y!+z!=t!$.*

Soit (x,y,z,t) un quadruplet solution.

Alors : $t!>x! \Leftrightarrow t>x \Leftrightarrow t\ge x+1 \Leftrightarrow t-1\ge x$.

De même : $t!>y! \Leftrightarrow t>y \Leftrightarrow t\ge y+1 \Leftrightarrow t-1\ge y$

$t!>z! \Leftrightarrow t>z \Leftrightarrow t\ge z+1 \Leftrightarrow t-1\ge z$

Ainsi : $x!+y!+z!\le 3(t-1)!$

La relation $t!\le 3(t-1)!$

$\Leftrightarrow t\times(t-1)!\le 3(t-1)!$

$\Leftrightarrow t\le 3$

D'où : $(x,y,z)\in\{0;1;2\}^3$.

On essaie toutes les possibilités. Vue la symétrie des rôles de x, y et z et puisque $t > \max\{x; y; z\}$, il suffit de tester successivement :

si $t = 1$: $(0,0,0,1)$

si $t = 2$: $(0,0,0,2)$, $(0,0,1,2)$, $(0,1,1,2)$, $(1,1,1,2)$

si $t = 3$: $(0,0,0,3)$, $(0,0,1,3)$, $(0,0,2,3)$, $(0,1,1,3)$, $(0,1,2,3)$, $(0,2,2,3)$, $(1,1,1,3)$, $(1,1,2,3)$, $(1,2,2,3)$, $(2,2,2,3)$

On ne trouve au final qu'une seule solution :

$$(x, y, z, t) = (2,2,2,3).$$