Anagrammes

Exercice 1B.1 :

On dispose des cinq lettres du mot MERCI, sans tenir compte du fait qu'elles aient une signification ou non.

1) Combien y a-t-il de tels anagrammes ?
2) Combien y a-t-il d'anagrammes commençant par la lettre C ?
3) Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
4) Combien de ces anagrammes commencent par une voyelle et finissent par une consonne ?

Exercice 1B.2 :

On s'intéresse aux anagrammes du mot MERCI.

1) Combien de mots de trois lettres différents peut-on constituer, sans tenir compte de leur signification éventuelle ?
2) Parmi ces mots de trois lettres, combien possèdent la lettre M en deuxième position ?
3) Parmi ces mots de trois lettres, combien contiennent la lettre I ?

Exercice 1B.3 :

Combien le mot BOND a-t-il d'anagrammes ayant un sens ou non ?

Exercice 1B.4 :

Calculer le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots :

MATHS, RIRE, PERE, THEOREME, ANANAS.

Exercice 1B.5 :

1) Combien existe-t-il d'anagrammes du mot 'faculté' ?
2) Combien peut-on former d'anagrammes du mot 'faculté', s'ils doivent commencer par t et se terminer par une voyelle ?

Exercice 1B.6 :

Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot 'compris', s'ils doivent commencer par i et se terminer par une consonne ?

Exercice 1B.7 :

On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois). Par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

1. Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?
2. Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?
3. Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?
4. Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 1B.8 :

1. Dénombrer le nombre de tiercés possibles avec 15 chevaux au départ de la course.
2. On tire 3 boules successivement et sans remise d'une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7.
   Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   Combien y a-t-il de tirages dont le produit des numéros vaut 30 ?
3. Dénombrer les anagrammes du mot MAMIE.
4. Dénombrer les anagrammes du mot MICHEL commençant et finissant par une consonne.

Exercice 1B.9 :

Quel est le nombre de mots de cinq lettres que l'on peut faire avec les lettres du mot SUPERMAN ? Avec le même mot, le nombre d'anagrammes ?

Plus dur : Le nombre d'anagrammes de BATMAN ? et de HARRY POTTER ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1B.1 :

On s'intéresse aux anagrammes du mot MERCI, sans tenir compte du fait qu'elles aient une signification ou non.

1) *Combien y a-t-il de tels anagrammes ?*
2) *Combien y a-t-il d'anagrammes commençant par la lettre C ?*
3) *Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?*
4) *Combien de ces anagrammes commencent par une voyelle et finissent par une consonne ?*

1) Le nombre de permutations est :

$$5!=120.$$

2) La première lettre étant fixé, on s'intéresse au nombre de permutations des 4 autres lettres :

$4!=24$: 24 anagrammes comment par la lettre C.

3) On dispose de 3 choix pour la première lettre. Ensuite on intègre le nombre de permutations des 4 autres lettres :

$3\times4!=3\times24=72$: 72 anagrammes comment par une consonne.

4) On dispose de 2 choix pour la première lettre et de 3 choix pour la dernière lettre.
Pour les 3 lettres du milieu, on doit considérer le nombre de permutations des 3 dernières lettres.
Principe multiplicatif :

$2\times3!\times3=2\times6\times3=36$ anagrammes.

Exercice 1B.2 :

On s'intéresse aux anagrammes du mot MERCI.

1) *Combien de mots de trois lettres différents peut-on constituer, sans tenir compte de leur signification éventuelle ?*
2) *Parmi ces mots de trois lettres, combien possèdent la lettre M en deuxième position ?*
3) *Parmi ces mots de trois lettres, combien contiennent la lettre I ?*

1) On choisit 3 lettres parmi 5, successivement, avec ordre et sans répétition. Le nombre de mots de trois lettres est :

$$5\times4\times3=60.$$

2) La lettre M étant fixée, il reste deux cases à remplir avec les quatre lettres restantes, avec ordre et sans répétition :

$$4\times3=12.$$

3) Première méthode :

Si la lettre I est en première position, il reste deux cases à remplir avec les quatre lettres restantes, avec ordre et sans répétition :

$4\times3=12$ possibilités.

Les trois positions possibles pour la lettre I donnent :

$3\times12=36$ possibilités.

Deuxième méthode :

Parmi les 60 mots de trois lettres, certains possèdent la lettre I et certains ne la contiennent pas.
Pour trouver le nombre de mots de trois lettres ne contenant pas la lettre I revient à choisir 3 lettres parmi 4, avec ordre et sans répétition.

$4\times3\times2=24$ mots de trois lettres ne contiennent pas la lettre I.

Par déduction, on trouve le nombre de trois lettres contenant la lettre I :

$$60-24=36$$

Exercice 1B.3 :

Combien le mot BOND a-t-il d'anagrammes ayant un sens ou non ?

Il y a ordre mais pas répétition : un anagramme du mot BOND est une permutation des 4 lettres.
Le nombre de permutations est :

$$4!=24.$$

Exercice 1B.4 :

Calculer le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots :

MATHS, RIRE, PERE, THEOREME, ANANAS.

MATHS :

Toutes les lettres du mot MATHS sont différentes, le nombre de permutations est égal à $5!=120$.

RIRE :

1ère méthode :

On place déjà I et E, il y a A_4^2 choix, puis les R identiques dans les deux places restantes, donc :

$$A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=4\times 3=12 \text{ anagrammes de RIRE.}$$

2ème méthode :

Le nombre total d'anagrammes est $4!$ qu'il faut diviser par le nombre de permutations des deux lettres R identiques $2!$, soit :

$$\frac{4!}{2!}=4\times 3=12$$

PERE :

1ère méthode :

On place déjà P et R, il y a A_4^2 choix, puis les E identiques dans les deux places restantes, donc :

$$A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=4\times 3=12 \text{ anagrammes de PERE.}$$

2ème méthode :

Le nombre total d'anagrammes est $4!$ qu'il faut diviser par le nombre de permutations des deux lettres E identiques $2!$, soit :

$$\frac{4!}{2!}=4\times 3=12$$

THEOREME

1ère méthode :

On place T, H, O, R et M puis les 3 E identiques dans les trois places restantes, donc :

$$A_8^5=\frac{8!}{(8-5)!}=8\times 7\times 6\times 5\times 4=6720 \text{ anagrammes de THEOREME.}$$

2ème méthode :

Le nombre total d'anagrammes est $8!$ qu'il faut diviser par le nombre de permutations des trois lettres E identiques $3!$, soit :

$$\frac{8!}{3!}=8\times 7\times 6\times 5\times 4=6720 \text{ anagrammes.}$$

ANANAS

Le nombre total d'anagrammes est $6!$ qu'il faut diviser par le nombre de permutations des trois lettres A identiques $3!$ et par le nombre de permutations des deux lettres N identiques $2!$, soit :

$$\frac{6!}{3!\times 2!}=\frac{6\times 5\times 4}{1\times 2}=60 \text{ anagrammes.}$$

Autre méthode liée à la deuxième partie du cours :

On place S, 6 choix, puis on choisit deux places non ordonnées parmi 5 pour les N donc $\binom{5}{2}$, on place les A dans les places restantes donc :

$$6\times\binom{5}{2}=6\times\frac{5!}{(5-2)!\times 2!}=\frac{6\times 5\times 4}{1\times 2}=60 \text{ anagrammes.}$$

NB :

Dans le mot ANANAS, le N se répète deux fois et le A se répète trois fois : le nombre de permutations est 6!
Pour le doublons N, il suffira de diviser par 2…
Mais pour les 3A, l'erreur commune est la division par 3 (donc par 3 fois 2, soit par 6 pour trouver en fin de compte 120=5!)

Les trois A que l'on pourrait baptiser A1, A2 et A3 ont combien de façons de s'agencer les uns par rapports aux autres ?

- **A1 A2 A3**
- **A1 A3 A2**
- **A2…**

Nous avons déjà étudié ce problème c'est le nombre de permutation d'un ensemble à 3 éléments !
Il y a 3!=6 façons de permuter les trois A.
Il y avait effectivement 2!=2 façons de permuter les deux N.
La réponse au problème est maintenant limpide :

$$\frac{6!}{2!\times 3!}=\frac{6\times 5\times 4}{2}=60 \text{ anagrammes à ANANAS.}$$

Exercice 1B.5 :

1) *Combien existe-t-il d'anagrammes du mot 'faculté' ?*
   Toutes les lettres sont différentes, donc il existe $7!=5040$ anagrammes.
2) *Combien peut-on former d'anagrammes du mot 'faculté', s'ils doivent commencer par t et se terminer par une voyelle ?*
   7 lettres : 3 voyelles et 4 consonnes : t x x x x x voyelle
   Répartition avec ordre :
   Pour la première lettre : 1 possibilité
   Pour la dernière lettre : 3 possibilités
   Pour les cinq lettres du milieu : arrangement de 5 lettres : 5 ! possibilités.
   Au total :
   $$1\times 5!\times 3=1\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 3=360 \text{ possibilités.}$$

Exercice 1B.6 :

Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot ''compris'', s'ils doivent commencer par i et se terminer par une consonne ?

7 lettres : 2 voyelles et 5 consonnes : i _ _ _ _ _ consonne
Répartition avec ordre :
Pour la première lettre : 1 possibilité
Pour la dernière lettre : 5 possibilités
Pour les cinq lettres du milieu : arrangement de lettres : 5 ! possibilités.
Au total :

$$1\times 5!\times 5=1\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 5=600 \text{ possibilités.}$$

Exercice 1B.7 :

On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois). Par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

1. *Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?*
2. *Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?*
3. *Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?*
4. *Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?*

1. CHERS contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes (permutations) est donc :
   $5!-1=119$. (−1 car on enlève le mot CHERS)
2. CHERE contient aussi cinq lettres, mais il y a deux E. Notons les E_1 et E_2 pour commencer. Les classements RE_1CHE_2 et RE_2CHE_1 donnent le même mot.
   D'une manière générale, toute anagramme est obtenue deux fois, une fois avec E_1 en premier, une fois avec E_2 en premier; le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de classements des cinq lettres, divisé par le nombre de classements des deux E.
   Le nombre d'anagrammes de CHERE est égal à : $\frac{5!}{2!}-1=59$.
3. CHERCHER contient huit lettres dont deux C, deux H, deux E, deux R. On doit diviser 8! par $(2!)^4$
   Le nombre d'anagrammes de CHERCHER est égal à : $\frac{8!}{(2!)^4}-1=2519$.
   On a donc : $\frac{8!}{(2!)^4}-1=2519$ anagrammes.
4. RECHERCHER contient 10 lettres dont trois R, trois E, deux C et deux H. Le nombre d'anagrammes est égal à : $\frac{10!}{3!\times 3!\times 2!\times 2!}-1=25199$.

Exercice 1B.8 :

1. *Dénombrer le nombre de tiercés possibles avec 15 chevaux au départ de la course.*
2. *On tire 3 boules successivement et sans remise d'une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7.*
   Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   Combien y a-t-il de tirages dont le produit des numéros vaut 30 ?
3. *Dénombrer les anagrammes du mot MAMIE.*
4. *Dénombrer les anagrammes du mot MICHEL commençant et finissant par une consonne.*

1. Un tiercé est ici un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 15 (les numéros des 3 premiers).
   On calcule donc : $A_{15}^3=\frac{15!}{12!}=15\times 14\times 13=2730$ →il y a 2730 tiercés possibles.
2. Un tirage est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 7 (les numéros des 3 boules).
   On calcule donc : $A_7^3=\frac{7!}{4!}=7\times 6\times 5=210$ →il y a 210 tirages possibles.
   Dénombrons maintenant les tirages dont le produit des numéros vaut 30.
   Les seules possibilités sont : $30=1\times 5\times 6=2\times 3\times 5$.
   Donc un tirage favorable correspond à une permutation des numéros 1, 6 et 5 ou 2, 3 et 5.
   On calcule donc : $3!+3!=12$ →il y a 12 tirages dont le produit des numéros vaut 30.
3. MAMIE a 5 lettres dont 2 identiques.
   Le rang des lettres A, I et E correspond à un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 5 (par exemple, pour MAMIE, cet arrangement est (2,4,5)).
   Une fois ces 3 lettres placées, les deux M vont dans les places restantes.
   On dénombre donc le nombre d'arrangements sans répétition de 3 éléments parmi 5.

On calcule donc : $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5\times4\times3 = 60$ → le mot MAMIE possède 60 anagrammes.

4. Le placement des deux consonnes de début et de fin (choisies parmi les quatre possibles) est un arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 4.

On calcule donc : $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4\times3 = 12$. → il y a 12 choix possibles pour les consonnes extérieures.

Une fois ces 2 lettres placées, les 4 autres lettres vont dans les places restantes. On dénombre alors le nombre de permutations de 4 éléments. On calcule donc :

$$4! = 24.$$

On calcule : $A_4^2 \times 4! = 12\times24 = 288$

→ le mot MICHEL possède donc 288 anagrammes commençant et finissant par un consonne.

Exercice 1B.9 :

Quel est le nombre de mots de cinq lettres que l'on peut faire avec les lettres du mot SUPERMAN ? Avec le même mot, le nombre d'anagrammes ?

Plus dur : Le nombre d'anagrammes de BATMAN ? et de HARRY POTTER ?

Nombre de mots de cinq lettres que l'on peut faire avec les lettres du mot SUPERMAN :

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8\times7\times6\times5\times4 = 6720.$$

Nombre de permutations des huit lettres du mot SUPERMAN :

$$8! = 40320.$$

Nombre d'anagrammes de BATMAN ayant deux lettres A :

$$\frac{6!}{2!} = 6\times5\times4\times3 = 360.$$

Nombre d'anagrammes de *HARRY POTTER* ayant trois lettres R et deux lettres T :

$$\frac{11!}{2!\times3!} = \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{2} = 3326400.$$