*M. Quet – **pas d'utilisation commerciale svp***

Permutations et nombres de listes (avec remise)

Exercice 1C.1

Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les dix chiffres 0, 1, 2, …,9

a) si les répétitions sont possibles ;

b) si les répétitions ne sont pas permises ;

c) si le dernier chiffre doit être zéro et les répétitions ne sont pas permises ?

NB : zéro ne peut pas commencer un nombre.

Exercice 1C.2

On désire que 5 hommes et 4 femmes s'assoient sur un banc de telle manière que les femmes occupent les places paires. Combien de possibilités y a-t-il ?

Exercice 1C.3

On garde tous les coeurs et tous les trèfles d'un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de permutations de ces 16 cartes dans lesquelles deux cartes consécutives quelconques sont de couleurs différentes.

Exercice 1C.4

On considère les cinq lettres a, b, c, d, e.
Combien peut-on former de mots avec ces cinq lettres, dans lesquels les voyelles a et e ne sont pas voisines ?

Exercice 1C.5

Soit un polygone convexe de n côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Exercice 1C.6 :

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 et on tire successivement et avec remise 5 jetons.
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 1C.7 :

Au cours d'un examen de 50 questions, les candidats ont le choix entre « vrai » et « faux » pour chaque question.
De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 1C.9

Dans un magasin, les clients ont le choix de payer à différentes caisses. De combien de façons différentes peuvent se répartir :

a) 5 clients à 3 caisses ?

b) 2 clients à 6 caisses ?

Exercice 1C.10

On dispose de trois tiroirs pour ranger cinq pulls différents. Chaque tiroir peut contenir les cinq pulls.

1) De combien de façons peut-on réaliser le rangement ?
2) Combien y a-t-il de rangements possibles pour lesquels aucun tiroir ne reste vide ?

Exercice 1C.11

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?
Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

Exercice 1C.1

Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les dix chiffres 0, 1, 2, …,9 ?
NB : zéro ne peut pas commencer un nombre.

a) *si les répétitions sont possibles :* chiffres : x x x x
possibilités : $9\times10\times10\times10=9000$

b) si les répétitions ne sont pas permises : chiffres : x x x x
possibilités : $9\times9\times8\times7=4536$

c) si le dernier chiffre doit être zéro et les répétitions ne sont pas permises : chiffres : x x x 0
possibilités : $9\times8\times7\times1=504$

Exercice 1C.3

On désire que 5 hommes et 4 femmes s'assoient sur un banc de telle manière que les femmes occupent les places paires. Combien de possibilités y a-t-il ?

sexe : H F H F H F H F H

Les permutations des hommes sont égales à 5!, celles des femmes sont égales à 4!
Le nombre de possibilités est :

$$5!\times4!=120\times24=2880$$

Exercice 1C.4

On garde tous les coeurs et tous les trèfles d'un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de permutations de ces 16 cartes dans lesquelles deux cartes consécutives quelconques sont de couleurs différentes.

D'après l'énoncé les couleurs sont alternées, coeur trèfle coeur trèfle ... ou trèfle cœur trèfle ... Donc deux cas.
Pour les coeurs il y a 8! cas (nombre de permutations de 8 éléments) et idem pour les trèfles donc :

$2\times(8!)^2$ permutations.

Exercice 1C.5

On considère les cinq lettres a, b, c, d, e. Combien peut-on former de mots avec ces cinq lettres, dans lesquels les voyelles a et e ne sont pas voisines ?

On considère l'évènement contraire, mots avec a et e consécutifs ou e et a consécutifs, donc deux cas.
On choisit deux rangs consécutifs, 4 choix (de 1,2 à 4,5). On place les trois lettres restantes dans les trois cases donc le nombre de leurs permutations est égal à 3!.
Le nombre de choix avec ces deux voyelles consécutives est donc :

$$2\times4\times3!$$

Sachant que l'on peut constituer 5! mots de 5 lettres, le nombre de mots recherché est égal à :

$$5!-2\times4\times3!.$$

Exercice 1C.6

Soit un polygone convexe de n côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Une diagonale joint deux sommets non consécutifs. Il y a n sommets donc par chaque sommet passent $n-3$ diagonales. Mais chaque diagonale est comptée deux fois donc ce polygone possède :

$\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Exercice 1C.7 :

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 et on tire successivement et avec remise 5 jetons.
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Il s'agit d'un tirage successif avec remise de 5 jetons parmi 8 ; c'est donc une 5-liste dans un ensemble à 8 éléments :

il y a donc $8^5 = 32\,768$ tirages possibles.

Exercice 1C.8 :

Au cours d'un examen de 50 questions, les candidats ont le choix entre « vrai » et « faux » pour chaque question. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Pour chaque question, il y a 2 réponses possibles (« vrai » ou »faux »).
Il y a ordre et répétition, chaque question est une 50-liste dans un ensemble à 2 éléments :

il y a donc 2^{50} façons de répondre.

Exercice 1C.9 :

Dans un magasin, les clients ont le choix de payer à différentes caisses. De combien de façons différentes peuvent se répartir :

a) 5 clients à 3 caisses ?
b) 2 clients à 6 caisses ?

a) le 1er client choisit une caisse, le 2ème aussi … : $3^5 = 243$.

b) le 1er client choisit une caisse, le 2ème aussi: $6^2 = 36$.

Exercice 1C.10 :

On dispose de trois tiroirs pour ranger cinq pulls différents. Chaque tiroir peut contenir les cinq pulls.

1) *De combien de façons peut-on réaliser le rangement ?*
2) *Combien y a-t-il de rangements possibles pour lesquels aucun tiroir ne reste vide ?*

1) Supposons que l'on ait 5 pulls P1, P2, P3, P4 et P5 et trois tiroirs A, B et C.
Pour chaque pull, on va choisir un tiroir parmi les 3 tiroirs proposés.
Donc au final, on obtient une combinaison de la forme : BBACA.
Le code BBACA est différent du code BABCA car chaque lettre désigne l'emplacement d'un pull.
→il s'agit d'un tri avec ordre et avec répétition car on peut choisir le même tiroir.
Le nombre de rangements est :
$3^5 = 243$.

2) Il est pertinent de regarder l'évènement contraire : étude du nombre de rangements pour lesquels un tiroir reste vide ou deux tiroirs restent vides.
Si le tiroir A reste vide : on doit considérer le nombre de rangements dans les 2 autres tiroirs
→la question précédente donne : $2^5 = 32$ rangements.
→il faut soustraire les cas où deux tiroirs restent vides : BBBBB et CCCCC.
→on obtient 30 possibilités pour le tiroir A vide, idem pour les autres tiroirs.
Si les tiroirs A et B restent vide :
→on obtient une seule possibilité : CCCCC
→de même pour deux autres tiroirs vides.
Le nombre de rangements tels qu'au moins un tiroir reste vide est donc égal à :
$3\times30+3\times1=93$.
Le nombre de rangements possibles pour lesquels aucun tiroir ne reste vide est :
$243-93=150$ rangements.

Exercice 1C.11

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?
Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

Un numéro de téléphone à 8 chiffres est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble :

$$\Omega = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Le cardinal de l'ensemble de ces 8-listes est :

$$(\text{card}\,\Omega)^8 = 10^8 .$$

On peut ainsi former 10^8 numéros de téléphone à 8 chiffres.

Un numéro de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble $\Omega' = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

L'ensemble de ces 10-listes est donc de cardinal :

$$(\text{card}\,\Omega')^8 = 9^8 = 43046721.$$

On peut ainsi former 43046721 numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0.