Arrangements

Exercice 1E.1 :

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Exercice 1E.2 :

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 1E.3 :

A) Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.
   1. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   3. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   4. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

B) Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   1. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   3. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 1E.4 :

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 1E.6 :

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1	2	3
4	5	6
A	B	C

1) Combien de codes différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 1E.7 :

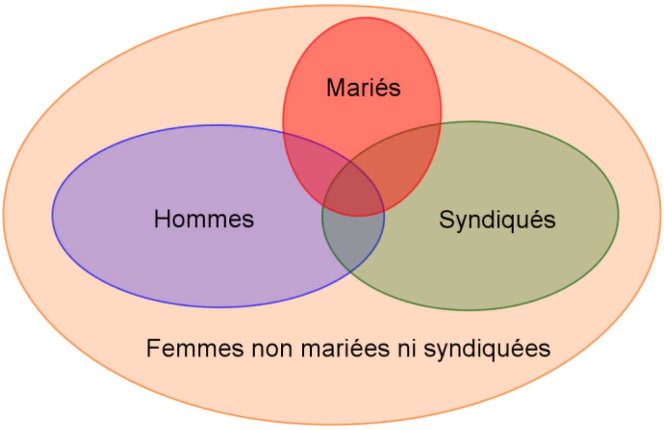
Dans chaque cas, au moins une des propositions est exacte. Préciser la(les)quelle(s).

1) Le nombre 0 ! :
   a) est égal à 0 b) est égal à 1 c) n'a pas été défini
2) Le nombre de listes à k éléments distincts ou non, dans un ensemble à p éléments :
   a) est égal à k^p b) est égal à p^k c) est égal à A_p^k.
3) Le nombre de listes à k éléments distincts, dans un ensemble à p éléments :
   a) est égal à k^p b) est égal à p^k c) est égal à A_p^k.
4) Le nombre 4! représente :
   a) le nombre de classements possibles dans un ensemble à 4 éléments.
   b) le nombre des permutations possibles dans un ensemble à 4 éléments.
   c) le nombre des arrangements des 4 éléments dans un ensemble de cardinal égal à 4.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1E.1 :

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?



Notons E, H, S et M les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés syndiqués, des employés mariés. L'énoncé donne :

$$card(\mathrm{E}) = 800 \text{ , } card(\mathrm{H}) = 300 \text{ , } card(\mathrm{S}) = 352 \text{ , } card(\mathrm{M}) = 424$$

$$card(\mathrm{H} \cap \mathrm{S}) = 188 \text{ , } card(\mathrm{H} \cap \mathrm{M}) = 166 \text{ , } card(\mathrm{S} \cap \mathrm{M}) = 208 \text{ , } card(\mathrm{H} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{S}) = 144$$

Ainsi :

$$card(\mathrm{H} \cup \mathrm{S}) = card(\mathrm{H}) + card(\mathrm{S}) - card(\mathrm{H} \cap \mathrm{S}) = 300 + 352 - 188 = 464$$

$$card(\mathrm{H} \cup \mathrm{S} \cup \mathrm{M}) = card(\mathrm{H} \cup \mathrm{S}) + card(\mathrm{M}) - card(\mathrm{H} \cap \mathrm{M}) - card(\mathrm{S} \cap \mathrm{M}) + card(\mathrm{H} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{S})$$
$$= 464 + 424 - 166 - 208 + 144 = 658$$

$$card(\overline{\mathrm{H}} \cap \overline{\mathrm{M}} \cap \overline{\mathrm{S}}) = card(\mathrm{E}) - card(\mathrm{H} \cup \mathrm{S} \cup \mathrm{M}) = 800 - 658 = 142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Solution proposée par ChatGPT :

Pour trouver le nombre de femmes célibataires non syndiquées, nous devons soustraire du nombre total de femmes le nombre de femmes mariées et le nombre de femmes syndiquées, puis ajouter le nombre de femmes mariées et syndiquées.

1) Calculons le nombre total de femmes : Nombre total d'employés - Nombre total d'hommes :
$$card(\overline{\mathrm{H}}) = card(\mathrm{E}) - card(\mathrm{H}) = 800 - 300 = 500$$

2) Calculons le nombre de femmes mariées : Nombre total d'employés mariés - Nombre d'hommes mariés et syndiqués :
$$card(\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{M}) = card(\mathrm{M}) - card(\mathrm{H} \cap \mathrm{M}) = 424 - 166 = 258$$

3) Calculons le nombre de femmes syndiquées : Nombre total de membres syndiqués - Nombre d'hommes syndiqués :
$$card(\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{S}) = card(\mathrm{S}) - card(\mathrm{H} \cap \mathrm{S}) = 352 - 188 = 164$$

4) Calculons le nombre de femmes mariées et syndiquées : Nombre total d'employés mariés et syndiqués - Nombre d'hommes mariés et syndiqués :
$$card(\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{S}) = card(\mathrm{S} \cap \mathrm{M}) - card(\mathrm{H} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{S}) = 208 - 144 = 64$$

5) Calculons le nombre de femmes célibataires non syndiquées : Nombre de femmes - Nombre de femmes mariées - Nombre de femmes syndiquées + Nombre de femmes mariées et syndiquées :
$$card(\overline{\mathrm{H}} \cap \overline{\mathrm{M}} \cap \overline{\mathrm{S}}) = card(\overline{\mathrm{H}}) - card(\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{M}) - card(\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{S}) + card(\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{S})$$
$$= 142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Exercice 1E.2 :

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. *Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?*
2. *Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.*
3. *Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.*

1. Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc $7^4 = 2401$ façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.

2. On peut procéder comme suit pour dénombrer le nombre de possibilités. La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix. La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix. La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisi, ce qui lui laisse 5 choix, et pour la dernière, il ne reste que 4 choix.
Arrangement sans remise avec ordre : le nombre de possibilités est donc

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = 7\times6\times5\times4 = 840.$$

3. On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun).
Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc

$$7^4 - 7 = 2401 - 7 = 2394.$$

Exercice 1E.3 :

A) Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. *Combien y-a-t-il de codes possibles ?*
2. *Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?*
3. *Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?*
4. *Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?*

B) Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

1. *Combien y-a-t-il de codes possibles ?*
2. *Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?*
3. *Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?*

A)

1. Il y a $9^3 = 729$ codes possibles.

2. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2, 4, 6, 8). Il y a donc $9\times9\times4 = 324$ codes.

3. On va compter par différence. Il y a $8\times8\times8 = 512$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9\times9\times9 - 8\times8\times8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

4. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3\times8\times8 = 192$ tels codes.

B)

1. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9\times8\times7 = 504$ choix possibles.

2. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8\times7\times5 = 280$ tels codes.

3. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8\times7\times3 = 168$.

4.

Exercice 1E.4 :

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. *si les livres doivent être groupés par matières.*
2. *si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.*

1. Il y a 3! façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a 4! façons de ranger les livres de mathématiques, 6! façons de ranger les livres de physique, et 3! façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc :
   $3!\times 4!\times 6!\times 3!$.
2. Il peut y avoir 0, 1, ..., 9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant les livres de mathématiques. Ce choix fait, il y a 4! façons d'ordonner les livres de mathématiques, et 9! façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout
   $10\times 4!\times 9!$ rangements différents.
   → $4!\times 9!$ correspondrait à deux blocs voisins, et pour chaque arrangement, on peut déplacer 10 fois le bloc de livres de maths.

Exercice 1E.5 :

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1	2	3
4	5	6
A	B	C

1) *Combien de codes différents peut-on former ?*
   Un code est un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble $\{A;B;C\}$, de cardinal 3, et de l'ensemble des 3-listes d'éléments de $\{1;2;3;4;5;6\}$, de cardinal $6^3=216$.
   Il y a donc $3\times 6^3=3\times 216=648$ codes possibles.
2) *Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?*
   Si le code ne doit pas contenir de chiffre 1, alors les 3-listes sont constituées d'éléments de $\{2;3;4;5;6\}$. Il y en a donc $5^3=125$, et le nombre de codes vaut alors $3\times 5^3=3\times 125=375$.
3) *Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?*
   En prenant le nombre de codes ne comportant pas le chiffre 1, on déduit le nombre d'avoir au moins le chiffre 1 :
   $648-375=273$ codes ayant au moins un chiffre 1.
4) *Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?*
   Les chiffres étant distincts, un code est un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble $\{A;B;C\}$, de cardinal 3, et de l'ensemble des 3-arrangements de 3 éléments pris parmi $\{1;2;3;4;5;6\}$. Ces arrangements sont au nombre de :
   $$A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=6\times 5\times 4=120.$$
   Il y a donc $3\times A_6^3=3\times 120=360$ codes possibles.
5) *Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?*
   Le contraire de « le code contient au moins deux chiffres identiques» étant « le code ne contient que des chiffres distincts », le nombre de codes contenant au moins deux chiffres identiques est égal au nombre total de codes diminué du nombre de codes ne contenant que des chiffres distincts, soit :
   $648-360=288$ codes possibles.

Exercice 1E.6

Dans chaque cas, au moins une des propositions est exacte. Préciser la(les)quelle(s).

1) Le nombre 0 ! :
a) est égal à 0 *b) est égal à 1* *c) n'a pas été défini*

2) Le nombre de listes à k éléments distincts ou non, dans un ensemble à p éléments :
a) est égal à k^p *b) est égal à* p^k *c) est égal à* A_p^k.

3) Le nombre de listes à k éléments distincts, dans un ensemble à p éléments :
a) est égal à k^p *b) est égal à* p^k *c) est égal à* A_p^k.

4) Le nombre 4! représente :

a) le nombre de classements possibles dans un ensemble à 4 éléments.
b) le nombre des permutations possibles dans un ensemble à 4 éléments.
c) le nombre des arrangements des 4 éléments dans un ensemble de cardinal égal à 4.

1) **Réponse b** : $0!=1$
2) **Réponse b** : sélection avec remise avec ordre (liste) : p^k
3) **Réponse c** : sélection avec remise avec ordre (liste) : A_p^k
4) **Réponses a, b et c**