Choisir *k* éléments par *n*

Sans ordre $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	Avec ordre Sans répétition $n(n-1)(n-k+1)$	Avec ordre avec répétition n^k	Nombre de permutations $n!$

Exercice 2A.1: Simplifier : $\dfrac{C_9^5}{C_8^5}=\dfrac{\binom{9}{5}}{\binom{8}{5}}$; $\dfrac{C_{n+2}^p}{C_{n+1}^p}=\dfrac{\binom{n+2}{p}}{\binom{n+1}{p}}$.

Exercice 2A.2 : Calculer : $C_8^2=\binom{8}{2}$; $C_{53}^{49}=\binom{53}{49}$.

Exercice 2A.3 : Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

1) $\binom{n}{2}=\binom{n+2}{1}$ « $C_n^2=C_{n+2}^1$ »

2) $\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}=387n$ « $C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3=387n$ »

Exercice 2A.4 : Démontrer que : $n\binom{n-1}{p-1}-p\binom{n}{p}=0$ « $nC_{n-1}^{p-1}-pC_n^p=0$ »

Exercice 2A.5 : Résoudre les équations suivantes :

$\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=\dfrac{5n^2-4n}{3}$ $\binom{n}{3}=n(2n-9)$

Exercice 2A.6 :

Carla s'occupe du rayon sciences d'une librairie. Elle doit mettre 5 livres sur un présentoir. Pour cela, elle choisit 3 livres d'astronomie parmi 4 et 2 livres de mathématiques parmi 5.

1) Combien a-t-elle de façons de choisir les livres
   - d'astronomie ?
   - de mathématiques ?
2) Après avoir choisi les livres qu'elle va présenter, elle doit ensuite décider de l'ordre dans lequel elle va les placer. Combien de dispositions peut-elle adopter ?
3) En déduire le nombre total de choix possibles pour organiser son présentoir.

Exercice 2A.7 :

Combien cela coûte-t-il pour jouer tous les résultats possibles des jeux de hasard suivants pour être sûr de gagner ?

1) Au Loto, il s'agit d'un tirage de 6 nombres parmi 49. Un même numéro ne peut pas être tiré plusieurs fois, l'ordre n'est pas pris en compte et une grille de Loto coûte 2 €.
2) Au Joker, il s'agit d'un tirage successif de 7 chiffres au hasard parmi les chiffres de 0 à 9. Un même chiffre peut être tiré plusieurs fois. Un jeu coûte 1 €.
3) Au Quinté, on s'intéresse à l'arrivée dans l'ordre des 5 premiers chevaux d'une course comportant 18 partants. Le prix d'un pari est de 1,50 €.

Exercice 2A.8

Un tournoi sportif compte 6 équipes, et chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien y aura-t-il de matchs ?

Exercice 2A.1 :

$$\frac{\binom{9}{5}}{\binom{8}{5}}=\frac{C_9^5}{C_8^5}=\frac{\dfrac{9!}{5!\times(9-5)!}}{\dfrac{8!}{5!\times(8-5)!}}=\frac{\dfrac{9!}{5!\times 4!}}{\dfrac{8!}{5!\times 3!}}=\frac{9!}{\boxed{5!}\times 4!}\times\frac{\boxed{5!}\times 3!}{8!}=\frac{9\times\boxed{8!}}{\boxed{8!}}\times\frac{\boxed{3!}}{4\times\boxed{3!}}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{\binom{n+2}{p}}{\binom{n+1}{p}}=\frac{C_{n+2}^p}{C_{n+1}^p}=\frac{\dfrac{(n+2)!}{p!\times(n+2-p)!}}{\dfrac{(n+1)!}{p!\times(n+1-p)!}}=\frac{(n+2)!}{\boxed{p!}\times(n+2-p)!}\times\frac{\boxed{p!}\times(n+1-p)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+2)\times\boxed{(n+1)!}}{\boxed{(n+1)!}}\times\frac{\boxed{(n+1-p)!}}{(n+2-p)\times\boxed{(n+1-p)!}}=\frac{n+2}{n+2-p}$$

Exercice 2A.2 :

$$\binom{8}{2}=C_8^2=\frac{8!}{2!\times(8-2)!}=\frac{8!}{2!\times 6!}=\frac{8\times 7\times\boxed{6!}}{2!\times\boxed{6!}}=4\times 7=28$$

$$\binom{53}{49}=C_{53}^{49}=\frac{53!}{49!\times(53-49)!}=\frac{53!}{49!\times 4!}=\frac{53\times 52\times 51\times 50\times\boxed{49!}}{\boxed{49!}\times 4\times 3\times 2}=53\times 13\times 17\times 25=292\ 825$$

Exercice 2A.3 :

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

1) $\binom{n}{2}=\binom{n+2}{1}$ soit : $C_n^2=C_{n+2}^1$

Il faut que $\begin{cases} n\geq 2\\ n+2\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n\geq 2\\ n\geq -1\end{cases}$: cette équation existe pour tout entier naturel $n\geq 2$.

$$\binom{n}{2}=\binom{n+2}{1}\Leftrightarrow\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=\frac{(n+2)!}{1!\times(n+2-1)!}\Leftrightarrow\frac{n\times(n-1)\times\boxed{(n-2)!}}{2\times\boxed{(n-2)!}}=\frac{(n+2)\times\boxed{(n+1)!}}{1\times\boxed{(n+1)!}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n\times(n-1)}{2}=n+2\Leftrightarrow n\times(n-1)=2(n+2)\Leftrightarrow n^2-3n-4=0$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n-4)=0$$

D'où : $n=-1$ ou $n=4$.

Or cette équation existe pour tout entier naturel $n\geq 2$.

$S=\{4\}$.

2) $\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}=387n$ soit : $C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3=387n$

Il faut que $\begin{cases} 2n\geq 1\\ 2n\geq 2\\ 2n\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n\geq\dfrac{1}{2}\\ n\geq 1\\ n\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}$: cette équation existe pour tout entier naturel $n\geq\dfrac{3}{2}$.

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}=387n \Leftrightarrow \frac{2n!}{1!\times(2n-1)!}+\frac{2n!}{2!\times(2n-2)!}+\frac{2n!}{3!\times(2n-3)!}=387n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n\times\boxed{(2n-1)!}}{\boxed{(2n-1)!}}+\frac{2n\times(2n-1)\times\boxed{(2n-2)!}}{2\times\boxed{(2n-2)!}}+\frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\boxed{(2n-3)!}}{3\times2\times\boxed{(2n-3)!}}=387n$$

$$\Leftrightarrow 2n+n\times(2n-1)+\frac{n\times(2n-1)\times(2n-2)}{3}=387n$$

$$\Leftrightarrow 6n+3n(2n-1)+n(2n-1)(2n-2)=1161n$$

$$\Leftrightarrow 6n+6n^2-3n+n\left(4n^2-4n-2n+2\right)-1161n=0$$

$$\Leftrightarrow 6n+6n^2-3n+4n^3-4n^2-2n^2+2n-1161n=0$$

$$\Leftrightarrow 4n^3-1156n=0$$

$$\Leftrightarrow 4n\left(n^2-289\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4n(n+17)(n-17)=0$$

D'où : $n=0$ ou $n=17$ ou $n=-17$.

Or cette équation existe pour tout entier naturel $n\geq\frac{3}{2}$.

$S=\{17\}$.

Exercice 2A.4 :

Montrer que $n\binom{n-1}{p-1}-p\binom{n}{p}=0$ *soit :* $nC_{n-1}^{p-1}-pC_n^p=0$

$$n\binom{n-1}{p-1}-p\binom{n}{p}=n\times\frac{(n-1)!}{(p-1)!\times\left[(n-1)-(p-1)\right]!}-p\times\frac{n!}{p!\times(n-p)!}$$

$$=\frac{n\times(n-1)!}{(p-1)!\times[n-1-p+1]!}-p\times\frac{n!}{p!\times(n-p)!}$$

$$=\frac{n!}{(p-1)!\times(n-p)!}-\frac{\boxed{p}\times n!}{\boxed{p}\times(p-1)!\times(n-p)!}$$

$$=\frac{n!}{(p-1)!\times(n-p)!}-\frac{n!}{(p-1)!\times(n-p)!}$$

$$=0$$

Exercice 2A.5

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=\frac{5n^2-4n}{3} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!\times(n+1-2)!}+\frac{(n+1)!}{3!\times(n+1-3)!}=\frac{5n^2-4n}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!\times(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{3!\times(n-2)!}=\frac{5n^2-4n}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=\frac{5n^2-4n}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3n(n+1)+(n-1)n(n+1)=10n^2-8n$$

$$\Leftrightarrow 3n^2+3n+n\left(n^2-1\right)=10n^2-8n$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n^2+3n+n^3-n=10n^2-8n$$
$$\Leftrightarrow \quad 3n^2+3n+n^3-n-10n^2+8n=0$$
$$\Leftrightarrow \quad n^3-7n^2+10n=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(n^2-7n+10\right)n=0$$

Soit $n=0$, soit $n^2-7n+10=0$:

$$\Delta=(-7)^2-4\times1\times10=49-40=9$$
$$n_1=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ et } n_2=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=5.$$

Ainsi : $S=\{0;2;5\}$.

$$\binom{n}{3}=n(2n-9) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{3!\times(n-3)!}=n(2n-9)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n(2n-9)$$
$$\Leftrightarrow \quad n(n-1)(n-2)=6n(2n-9)$$
$$\Leftrightarrow \quad n(n-1)(n-2)-6n(2n-9)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad n\left[(n-1)(n-2)-6(2n-9)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \quad n\left[n^2-2n-n+2-12n+54\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \quad n\left(n^2-15n+56\right)=0$$

Soit $n=0$, soit $n^2-15n+56=0$:

$$\Delta=(-15)^2-4\times1\times56=225-224=1$$
$$n_1=\frac{15-1}{2}=\frac{14}{2}=7 \text{ et } n_2=\frac{15+1}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

Ainsi : $S=\{0;7;8\}$.

Exercice 2A.6 :

Carla s'occupe du rayon sciences d'une librairie. Elle doit mettre 5 livres sur un présentoir. Pour cela, elle choisit 3 livres d'astronomie parmi 4 et 2 livres de mathématiques parmi 5.

1) *Combien a-t-elle de façons de choisir les livres*
- *d'astronomie ?*
- *de mathématiques ?*

Le choix de Carla ne dépend pas de l'ordre des livres choisis.

En astronomie : Carla choisit 3 livres parmi 4 sans ordre :

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times1}=4$$

En mathématiques : Carla choisit 2 livres parmi 5 sans ordre :

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!\times3!}=\frac{4\times5}{1\times2}=10.$$

2) *Après avoir choisi les livres qu'elle va présenter, elle doit ensuite décider de l'ordre dans lequel elle va les placer. Combien de dispositions peut-elle adopter ?*

Appelons les 5 livres choisis A, B, C, D et E. Carla va choisir une permutation de la forme BDECA.

Le nombre de permutations est :

$$5!=120$$, soit 120 dispositions.

3) *En déduire le nombre total de choix possibles pour organiser son présentoir.*
Pour un choix de 5 livres, on a 120 dispositions.
Le nombre de choix de 5 livres est :

$$\binom{4}{3}\times\binom{5}{2}=4\times10=40.$$

Le nombre total de choix de livres est :

$$40\times120=4800.$$

Exercice 2A.7 :

Combien cela coûte-t-il pour jouer tous les résultats possibles des jeux de hasard suivants pour être sûr de gagner ?

1) *Au Loto, il s'agit d'un tirage de 6 nombres parmi 49. Un même numéro ne peut être tiré plusieurs fois, l'ordre n'est pas pris en compte et une grille de Loto coûte 2 €.*
Remplir une grille de Loto revient à choisir 6 nombres parmi 49, sans ordre et sans répétition :

$$\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!(49-6)!}=\frac{49!}{6!\times43!}=\frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=49\times4\times47\times46\times3\times11=13\ 983\ 816$$

Chaque grille coûtant 2 €, le montant s'élève à :

$$13\ 983\ 816\times2=27\ 967\ 632\ €.$$

2) *Au Joker, il s'agit d'un tirage successif de 7 chiffres au hasard parmi les chiffres de 0 à 9. Un même chiffre peut être tiré plusieurs fois. Un jeu coûte 1 €.*
Au Joker, une combinaison gagnante peut être : 3-4-2-4-0-3-9. L'ordre des chiffres compte.
Choisir une combinaison au Joker revient à choisir 7 chiffres parmi 10, avec ordre et avec répétition

$$10^7=10\ 000\ 000.$$

Chaque combinaison coûtant 1 €, le montant s'élève à 10 000 000 €.

3) *Au Quinté, on s'intéresse à l'arrivée dans l'ordre des 5 premiers chevaux d'une course comportant 18 partants. Le prix d'un pari est de 1,50 €.*
Remplir une grille de Quinté revient à choisir 5 nombres parmi 18, avec ordre et sans répétition :

$$18\times17\times16\times15\times14=1\ 028\ 160$$

Chaque grille coûtant 1,50 €, le montant s'élève à :

$$1\ 028\ 160\times1,5=1\ 542\ 240\ €.$$

Exercice 2A.8 :

Un tournoi sportif compte 6 équipes, et chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien y aura-t-il de matchs ?
Il n'y a pas ordre : un match est donc une combinaison de 2 équipes parmi 6.

il y a donc $\binom{6}{2}=C_6^2=\frac{6!}{2!\times(6-2)!}=\frac{6!}{2!\times4!}=\frac{6\times5}{2}=15$ matchs.