Tirages de boules dans une urne

Exercice 2C.1

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 et on tire successivement et avec remise 5 jetons.
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 2C.2

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire trois boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité :
   a) d'obtenir trois boules rouges ;
   b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;
   c) d'obtenir au moins une boule rouge ;
   d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;
   e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;
   f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

Exercice 2C.3

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher.

1. On tire successivement sans remise trois boules dans l'urne.
   a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2. Reprendre la première question, en supposant que les trois boules sont tirées simultanément. Comparer les résultats obtenus dans les deux questions.

Exercice 2C.4

Une urne contient 5 boules vertes numérotées de 1 à 5, et 4 boules rouges numérotées de 1 à 4.
On tire simultanément 3 boules ; combien y a-t-il de tirages :

1) en tout ?
2) contenant 3 boules de même couleur ?
3) 1 verte et 2 rouges ?
4) au moins une verte ?

Exercice 2C.5

On tire successivement 4 boules d’un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes. Déterminer le nombre de tirages permettant d’obtenir :

a) 4 boules jaunes ;
b) 4 boules vertes ;
c) 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
d) 3 jaunes et une verte ;
e) 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
f) deux jaunes et deux vertes ;
g) au moins 3 vertes ;
h) au plus 3 jaunes.

On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 2C.1 :

*Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 et on tire **successivement** et avec remise 5 jetons.*
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Il s'agit d'un tirage successif avec remise de 5 jetons parmi 8 ; c'est donc une 5-liste dans un ensemble à 8 éléments :

il y a donc $8^5 = 32\ 768$ tirages possibles.

Exercice 2C.2

*Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire trois boules dans cette urne, **successivement**, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.*

1. *Quel est le nombre de tirages possibles ?*

   Le nombre de tirages possibles est : $12^3 = 1728$

2. *Calculer la probabilité :*

   a) *d'obtenir trois boules rouges :*

   Pour un **tirage avec ordre et remise**, on compte $5^3 = 125$ possibilités.

   La probabilité est : $\frac{5^3}{12^3} = \frac{125}{1728}$.

   b) *d'obtenir deux boules rouges exactement :*

   3 possibilités d'obtenir deux boules rouges et une boule non rouge : $RR\overline{R}, R\overline{R}R, \overline{R}RR$

   Pour chaque possibilité, on a $5^2 \times 7$ issues.

   La probabilité est : $\frac{3\times5^2\times7}{12^3} = \frac{108}{1728}$.

   c) *d'obtenir au moins une boule rouge :*

   La probabilité d'obtenir une boule non rouge est $\frac{7^3}{12^3}$ donc la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est : $1-\frac{7^3}{12^3} = \frac{1385}{1728}$.

   d) *d'obtenir deux boules vertes et une noire :*

   3 possibilités d'obtenir deux boules vertes et une boule noire: VVN , VNV , NVV

   Pour chaque possibilité, on a $3^2 \times 4$ issues.

   Tirage **avec ordre et remise** : la probabilité est : $\frac{3\times3^2\times4}{12^3} = \frac{108}{1728}$

   e) *d'obtenir trois boules de la même couleur :*

   Tirage **avec ordre et remise** : la probabilité est : $\frac{3^3+4^3+5^3}{12^3} = \frac{216}{1728}$.

   f) *d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes :*

   On dénombre $3! = 6$ permutations, pour chaque permutation, la probabilité est : $3\times4\times5$

   La probabilité est : $\frac{6\times(3\times4\times5)}{12^3} = \frac{360}{1728}$.

Exercice 2C.3

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher.

1. *On tire **successivement** sans remise trois boules dans l'urne.*

   a) *Combien y a-t-il de tirages possibles ?*

Un tirage (avec ordre et sans remise) est constitué d'une suite de trois boules distinctes choisies parmi 8. Le nombre de tirages équiprobables possibles est $A_8^3 = \dfrac{8!}{(8-3)!} = 8\times7\times6 = 336$.

b) *Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?*
A partir des 6 permutations des boules rouges, le nombre de tirages de trois boules rouges est :

$$\frac{3!}{A_8^3} = \frac{3!}{336} = \frac{1}{56}$$

c) *Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?*

Le nombre de façons de tirer successivement deux boules rouges distinctes est A_3^2.

Le nombre de façons de tirer une boule blanche est A_5^1.

Le nombre de façons de placer deux boules rouges parmi trois positions est $\binom{3}{2}$.

Donc, la probabilité cherchée est : $\dfrac{\binom{3}{2}\times A_3^2\times A_5^1}{A_8^3} = \dfrac{3\times\frac{3!}{1!}\times\frac{5!}{4!}}{336} = \dfrac{3\times6\times5}{336} = \dfrac{15}{56}$.

2. *Reprendre la première question, en supposant que les trois boules sont tirées* ***simultanément****. Comparer les résultats obtenus dans les deux questions.*

a) Un tirage revient à prendre trois éléments **sans ordre et sans remise** dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages possibles est donc le nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble à 8 éléments, c'est-à-dire $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!\times5!} = \dfrac{8\times7\times6}{2\times3} = 56$.

b) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est : $\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{1}{56}$.

c) La probabilité d'obtenir deux boules rouges est : $\dfrac{\binom{3}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{3\times5}{56} = \dfrac{15}{56}$.

(où $\binom{3}{2}$ correspond au nombre de façons de tirer simultanément deux boules rouges et $\binom{5}{1}$ correspond au nombre de façons de tirer une boule blanche parmi 5 boules).
On peut remarquer que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux de la question 1.

Exercice 2C.4 :

Une urne contient 5 boules vertes numérotées de 1 à 5, et 4 boules rouges numérotées de 1 à 4.
On tire ***simultanément*** *3 boules ; combien y a-t-il de tirages :*

1) *en tout ?*
2) *contenant 3 boules de même couleur ?*
3) *1 verte et 2 rouges ?*
4) *au moins une verte ?*

1) On choisit 3 boules parmi 9 **sans ordre ni remise**, il s'agit ainsi d'une combinaison :

il y a $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!\times6!} = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$ tirages possibles.

2) On peut tirer 3 boules vertes parmi les 5 boules vertes ou 3 boules rouges parmi les 4 rouges :

$$\text{il y a } \binom{5}{3}+\binom{4}{3}=\frac{5!}{3!\times 2!}+\frac{4!}{3!\times 1!}=\frac{4\times 5}{2}+4=14 \text{ tirages possibles.}$$

3) On tire 1 boule verte parmi les 5 boules vertes et 2 boules rouges parmi les 4 rouges :

$$\text{il y a } \binom{5}{1}\times\binom{4}{2}=\frac{5!}{1!\times 4!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=5\times\frac{4\times 3}{2}=30 \text{ tirages possibles.}$$

4) Prendre au moins une verte est le contraire de ne prendre aucune verte, c'est-à-dire prendre 3 rouges parmi les 4 rouges :

$$\text{il y a } \binom{9}{3}-\binom{4}{3}=84-4=80 \text{ tirages possibles.}$$

Exercice 2C.5 :

On tire ***successivement*** *4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.*
Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :
On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

Lors de tirages consécutifs, on suppose que les boules sont numérotées pour mettre en évidence l'ordre des boules :

- avec remise un résultat est une 4-liste de l'ensemble produit E^4 où E est l'ensemble des dix boules ;
- sans remise un résultat est un arrangement.

a) *4 boules jaunes (parmi les 7 boules jaunes) :*

- **Avec ordre et remise** : le nombre de 4-liste est 7^4 ;
- **Avec ordre sans remise** : le nombre de 4-arrangement est : A_7^4.

b) *4 boules vertes (parmi les 3 boules vertes) :*

- Avec remise : le nombre de 4-liste est 3^4 ;
- Sans remise : le nombre de 4-arrangement est : 0.

c) *3 boules jaunes en premier puis une boule verte :*

- Avec remise et avec ordre : $7^3\times 3$;
- Sans remise et avec ordre : $A_7^3\times A_3^1$.

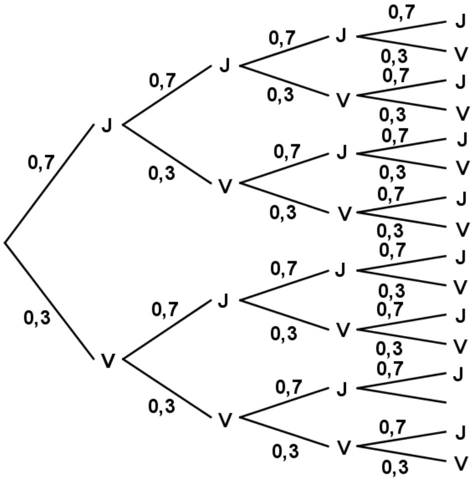
d) *3 boules jaunes et une boule verte :*

- Avec remise et sans ordre :
  4 possibilités d'obtenir trois boules jaunes et une boule verte : JJJV , JJVJ , JVJJ , VJJJ
  →pour chaque possibilité, on dénombre : $7^3\times 3$ issues
  $4\times 7^3\times 3=4116$;
- Sans remise et sans ordre : $\binom{7}{3}\times\binom{3}{1}=105$

AUTRE METHODE (avec remise) : en passant par les probabilités :

La probabilité d'obtenir trois boules jaunes et une boule verte est :

$$4\times 0,7^3\times 0,3.$$



Or la probabilité est égale au nombre de situations gagnantes divisé par le nombre total de situations

$$4\times 0,7^3\times 0,3=\frac{N}{10^4}$$

donc : $N=4\times 0,7^3\times 0,3\times 10^4=4\times 7^3\times 3$

e) 2 boules jaunes en premier puis 2 boules vertes :

- Avec ordre et remise : $7^2\times 3^2$;
- Avec ordre et sans remise : $A_7^2\times A_3^2$.

f) 2 boules jaunes et 2 boules vertes

On choisit les deux places non ordonnées des deux vertes donc $\binom{4}{2}$ possibilités.

- Avec ordre et remise : $7^2\times 3^2\times\binom{4}{2}$;
- Avec ordre et sans remise : $A_7^2\times A_3^2\times\binom{4}{2}$.

g) 3 boules vertes exactement ou 4 boules vertes exactement.

Pour 3 boules vertes, on dispose de $\binom{4}{3}=4$ choix pour la place de la boule jaune

- Avec remise : $\binom{4}{3}\times 7\times 3^3=4\times 7\times 3^3$;
- Sans remise : $\binom{4}{3}\times A_7^1\times A_3^3=4\times 7\times 3!$ (on retrouve le nombre de permutations des boules vertes)

Pour 4 boules vertes :

- Avec remise : 3^4 possibilités ;
- Sans remise : 0 possibilité.

En tout :

- Avec remise : $4\times 7\times 3^3+3^4$ possibilités ;
- Sans remise : $4\times 7\times 3!$ possibilités.

h) au plus 3 boules jaunes :

Evènement contraire : 4 jaunes exactement.

Avec le même raisonnement que ci-dessus on obtient :

- Avec remise : 7^4 possibilités ;
- Sans remise : A_7^4 possibilités.

Par déduction, pour au plus 3 boules jaunes :

- Avec remise : 10^4-7^4 possibilités ;
- Sans remise : $A_{10}^4-A_7^4$ possibilités.